

Guía de Apoyo al Tutor y Apuntes de Clase

Espacio Dual, Aplicación Traspuesta, Bases Duales y Clasificación de Endomorfismos (Jordan)

Preparado especialmente para la clase de:

Estudiante Universitaria

Idea visual clave / Intuición

Nota pedagógica para el Tutor:

Esta guía ha sido diseñada para servirte como “apoyo en vivo” durante la clase. Cada tema teórico está acompañado por una explicación de su significado geométrico intuitivo y por gráficos en dos dimensiones ($\mathbb{R}^2$). Los ejercicios están resueltos desglosando cada paso aritmético para que puedas explicar la lógica matemática con total fluidez y seguridad, incluso si no tuviste tiempo de repasar previamente.

Índice

1. Marco teórico intuitivo	3
1.1. Espacio dual y formas lineales	3
1.2. Bases duales	4
1.3. Aplicación traspuesta	4
1.4. Clasificación de endomorfismos y bloques de Jordan	5
2. Resolución paso a paso: Ejercicio 1 (Traspuesta)	7
3. Resolución paso a paso: Ejercicio 2 (Clasificación sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$)	11
3.1. Estudio sobre el cuerpo de los números reales ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)	11
3.2. Estudio sobre el cuerpo de los números complejos ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)	13
4. Resolución paso a paso: Ejercicio 3 (Estructuras de Jordan)	15
5. Resumen y consejos para Tutor durante la clase	19

1. Marco teórico intuitivo

El álgebra lineal abstracta puede resultar árida si solo se maneja a nivel de fórmulas matriciales. En esta sección dotamos de sentido geométrico y conceptual a los pilares del examen: el dual, la traspuesta y la forma canónica de Jordan.

1.1. Espacio dual y formas lineales

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Su **espacio dual** V^* es el conjunto de todas las aplicaciones lineales que van de V al cuerpo $\mathbb{K}$:

$$V^* = \{\omega : V \rightarrow \mathbb{K} \mid \omega \text{ es lineal}\}.$$

A los elementos de V^* se les llama **formas lineales** (o covectores).

¿Qué es realmente una forma lineal?

Un vector $v \in V$ representa una flecha con dirección y magnitud. Una forma lineal $\omega \in V^*$ no es una flecha, sino un **sistema de medición**. Toma un vector y devuelve un escalar.

Geométricamente en $\mathbb{R}^2$, una forma lineal $\omega(x, y) = \alpha x + \beta y$ se representa mediante sus **líneas de nivel**: una familia de rectas paralelas equidistantes. Evaluar un vector v en ω consiste en contar cuántas líneas de nivel atraviesa ese vector. El **núcleo** ($\text{Ker } \omega$) es la línea de nivel cero (la recta que pasa por el origen).

Forma lineal en $\mathbb{R}^2$
 $\omega(x, y) = 2x + y$: medir un vector es proyectarlo sobre un sistema de niveles

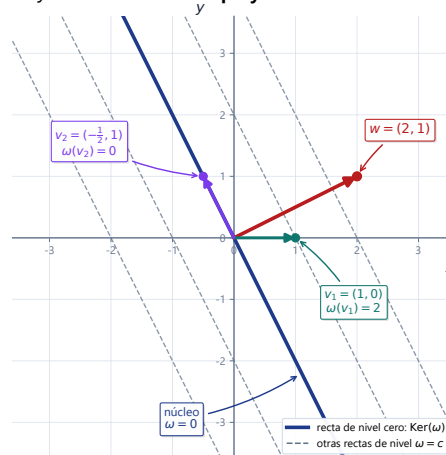


Figura 1: Representación de la forma lineal $\omega(x, y) = 2x + y$. Las líneas discontinuas son los niveles de evaluación $\omega = c$. El vector $v_2 = (-0.5, 1)$ pertenece al kernel ($\omega(v_2) = 0$). El vector normal rojo $\vec{w} = (2, 1)$ da la dirección de máximo crecimiento.

1.2. Bases duales

Si V es de dimensión finita con base $B = (v_1, \dots, v_n)$, existe una base única en V^* llamada **base dual** $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$, definida por:

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Idea visual clave / Intuición

Intuición de la base dual:

Cada funcional v_i^* actúa como un “sensor de coordenadas”. Si tomas un vector cualquiera $v = c_1v_1 + \dots + c_nv_n$, al aplicarle v_i^* obtienes exactamente la coordenada c_i :

$$v_i^*(v) = c_i.$$

En $\mathbb{R}^2$, si la base $B = (v_1, v_2)$ no es ortogonal, los funcionales duales se construyen buscando líneas de nivel. La línea $v_1^* = 0$ debe ser paralela al vector v_2 (para anularlo) y la línea $v_1^* = 1$ debe pasar por el extremo de v_1 .

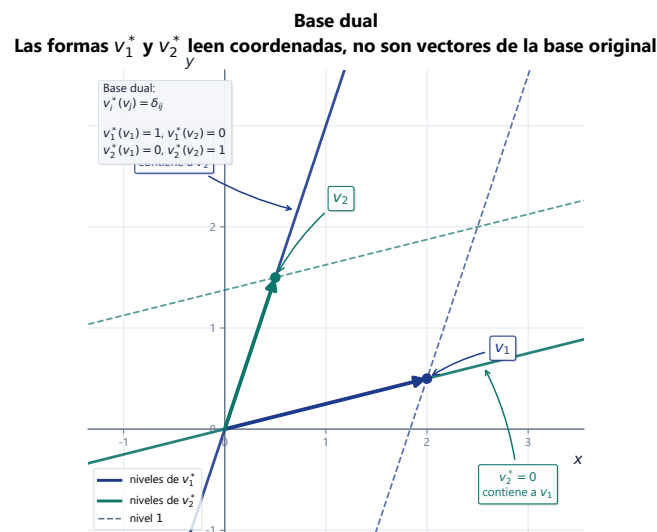


Figura 2: Geometría de la base dual en $\mathbb{R}^2$ para $v_1 = (2, 0.5)$ y $v_2 = (0.5, 1.5)$. Se observa cómo el kernel de v_1^* (línea punteada azul $v_1^* = 0$) está alineado con v_2 , mientras que $v_1^* = 1$ pasa por el extremo de v_1 .

1.3. Aplicación traspuesta

Dada una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$, su **aplicación traspuesta** $f^* : W^* \rightarrow V^*$ se define para cualquier forma $\omega \in W^*$ como:

$$f^*(\omega) = \omega \circ f.$$

¡El sentido de la flecha cambia!

Es muy común confundirse con esto. Si f empuja vectores de V hacia W , la traspuesta f^* tira formas lineales de W^* hacia V^* .

$$\begin{aligned} f &: V \longrightarrow W && \text{(Avance de vectores)} \\ f^* &: W^* \longrightarrow V^* && \text{(Retracción de formas)} \end{aligned}$$

Si ω mide vectores en W , entonces $f^*(\omega)$ es la forma que mide vectores en V pasándolos primero por el filtro de f .

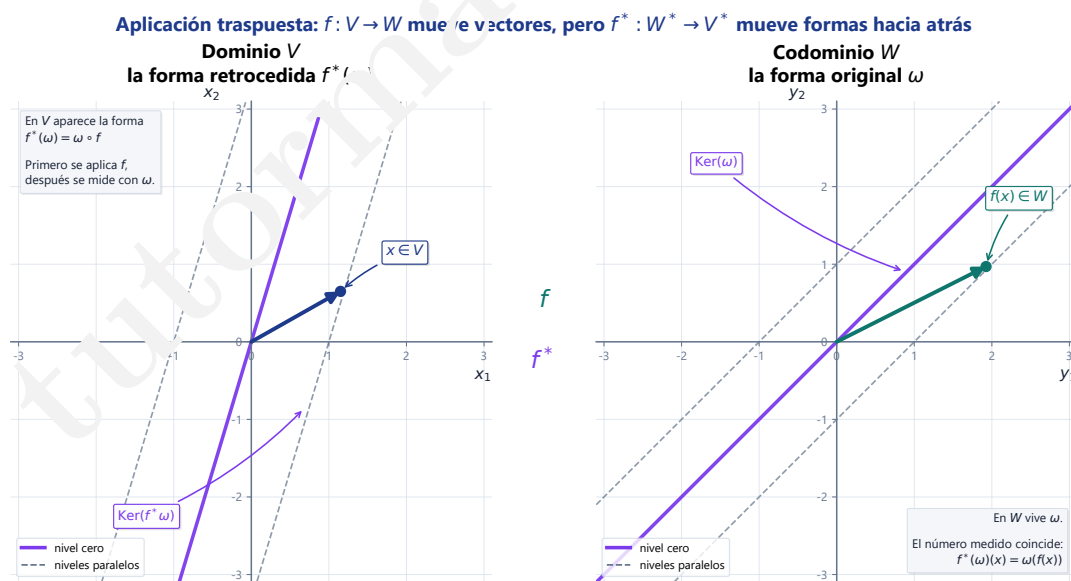


Figura 3: Visualización del retroceso (pullback) de una forma lineal. La transformación f mapea el vector x_1 en $f(x_1)$ en el espacio W . La forma lineal ω en W se traslada hacia el dominio V como $f^*(\omega)$, de modo que el valor medido sigue siendo el mismo:

$$f^*(\omega)(x_1) = \omega(f(x_1)) = 1.0.$$

1.4. Clasificación de endomorfismos y bloques de Jordan

Clasificar un endomorfismo $f: V \rightarrow V$ consiste en encontrar una base donde su matriz asociada sea lo más simple posible.

Característico vs. Anulador (Minimal)

El **polinomio característico** $c_f(x) = \det(x \text{Id} - f)$ revela los autovalores y sus multiplicidades algebraicas (el tamaño total que ocupará cada autovalor en la diagonal).

El **polinomio anulador o minimal** $p_f(x)$ es el polinomio de menor grado tal que $p_f(f) = 0$. El exponente de cada factor $(x - \lambda)$ en el minimal indica el **tamaño del bloque de Jordan más grande** asociado a ese autovalor.

Si un autovalor λ tiene multiplicidad algebraica $m_a(\lambda) = 2$ pero multiplicidad geométrica $m_g(\lambda) = \dim E_\lambda = 1$ (un único autovector independiente), es imposible diagonalizar. En su lugar, aparece un bloque de Jordan de tamaño 2:

$$J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad (\text{notación inferior}) \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (\text{notación superior})$$

En esta guía usamos la notación inferior porque coincide con las notas del examen aportadas por Alejandra.

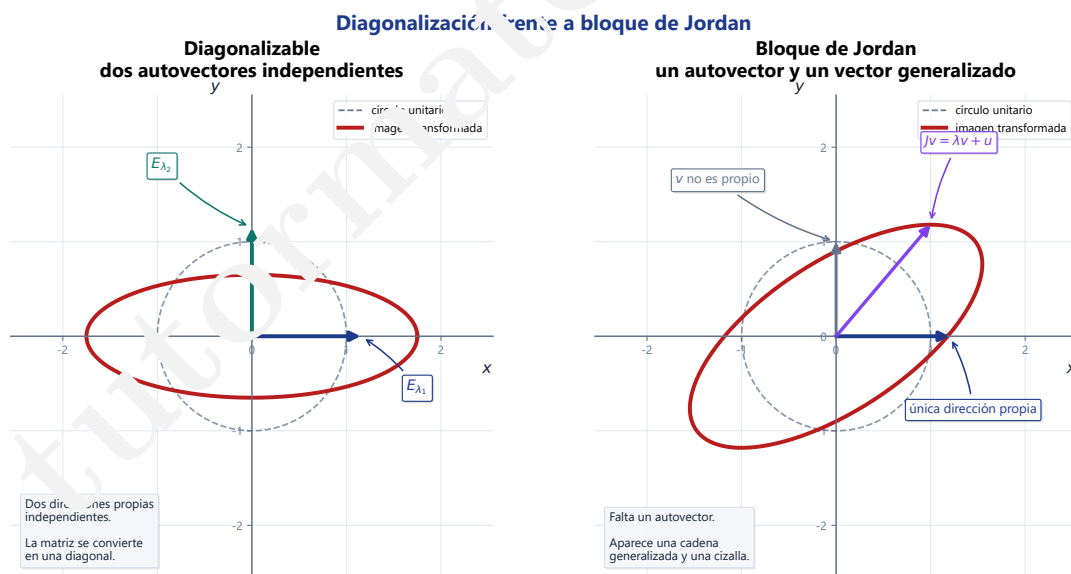


Figura 4: Diferencia geométrica en la deformación de un círculo unitario. A la izquierda, la diagonalización estira a lo largo de dos autovectores independientes. A la derecha, el bloque de Jordan posee una única dirección de autovector (eje x), produciendo un deslizamiento (cizalla) en la otra dirección.

2. Resolución paso a paso: Ejercicio 1 (Trespuesta)

Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ dada por:

$$f(a, b, c) = (a + b + 2c) + (2a + c)x + (b + c)x^2.$$

Consideramos las bases estándar $B_{\mathbb{R}^3} = (e_1, e_2, e_3) \subset \mathbb{R}^3$ y $B = (1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$, y la forma lineal $\theta : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\theta(p(x)) = p(1) + p'(1)$.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Apartado a) Calcular bases de $\text{Ker}(f^*)$ e $\text{Im}(f^*)$

Paso 1: Construcción de la matriz $A = [f]_{B_{\mathbb{R}^3}, B}$

Evaluamos los vectores de la base estándar de $\mathbb{R}^3$ en la función f :

- Para $e_1 = (1, 0, 0)$: $f(1, 0, 0) = (1) + (2)x + (0)x^2 = 1 + 2x$.

Las coordenadas en la base $B = (1, x, x^2)$ son: $[f(e_1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Para $e_2 = (0, 1, 0)$: $f(0, 1, 0) = (1) + (0)x + (1)x^2 = 1 + x^2$.

Las coordenadas en la base B son: $[f(e_2)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Para $e_3 = (0, 0, 1)$: $f(0, 0, 1) = (2) + (1)x + (1)x^2 = 2 + x + x^2$.

Las coordenadas en la base B son: $[f(e_3)]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Colocando estos vectores en las columnas, obtenemos la matriz asociada:

$$A = [f]_{B_{\mathbb{R}^3}, B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Paso 2: Análisis del rango de f (Determinante)

Calculamos el determinante de A desarrollando por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1(0 - 1) - 1(2 - 0) + 2(2 - 0) = -1 - 2 + 4 = 1. \end{aligned}$$

Como $\det(A) = 1 \neq 0$, la matriz es invertible. Esto significa que:

- f es un **isomorfismo** (inyectiva y sobreyectiva).
- $\text{Ker}(f) = \{0\}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

Paso 3: Matriz de la traspuesta f^*

Por la propiedad teórica, la matriz de la traspuesta en las bases duales es la traspuesta de la matriz original:

$$[f^*]_{B^*, B_{\mathbb{R}^3}^*} = A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dado que A es invertible, su traspuesta A^t también lo es. Por lo tanto, $f^* : (\mathbb{R}_{\leq 2}[x])^* \rightarrow (\mathbb{R}^3)^*$ es también un isomorfismo.

Bases resultantes:

- Como f^* es inyectiva, su núcleo es el subespacio cero: $\text{Ker}(f^*) = \{0\}$. Su base es vacía: $\boxed{\emptyset}$.
- Como f^* es sobriyectiva, su imagen es todo el espacio dual de llegada: $\text{Im}(f^*) = (\mathbb{R}^3)^*$. Una base para este espacio es la base dual de $\mathbb{R}^3$: $\boxed{B_{\mathbb{R}^3}^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)}$.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio**Apartado b) Dar una base de $(\text{Im } f)^\circ$ (el anulador de la imagen)**

El anulador de un subespacio $S \subseteq W$ está formado por todas las formas lineales de W^* que valen cero sobre cualquier vector de S .

En el apartado anterior demostramos que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ (todo el espacio de llegada). Por definición:

$$(\text{Im } f)^\circ = (\mathbb{R}_{\leq 2}[x])^\circ = \{\omega \in (\mathbb{R}_{\leq 2}[x])^* \mid \omega(p(x)) = 0, \forall p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]\}.$$

La única forma lineal capaz de anular a todos los polinomios es la forma lineal cero. Por tanto, $(\text{Im } f)^\circ = \{0\}$ y su base es la base vacía: $\boxed{\emptyset}$.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio**Apartado c) Obtener las coordenadas de θ en la base dual B^***

La forma lineal está definida por $\theta(p(x)) = p(1) + p'(1)$. Sea un polinomio genérico $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

Paso 1: Evaluar el polinomio y su derivada en $x = 1$

$$\begin{aligned} p(1) &= \alpha + \beta(1) + \gamma(1)^2 = \alpha + \beta + \gamma. \\ p'(x) &= \beta + 2\gamma x \implies p'(1) = \beta + 2\gamma(1) = \beta + 2\gamma. \end{aligned}$$

Paso 2: Sumar ambas evaluaciones para obtener $\theta(\gamma)$

$$\theta(p(x)) = (\alpha + \beta + \gamma) + (\beta + 2\gamma) = \alpha + 2\beta + 3\gamma.$$

Paso 3: Identificar con los funcionales de la base dual B^*

Por definición de la base dual $B^* = (1^*, x^*, (x^2)^*)$ aplicada al polinomio $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$:

$$1^*(p) = \alpha, \quad x^*(p) = \beta, \quad (x^2)^*(p) = \gamma.$$

Sustituyendo estos funcionales en la expresión de $\theta(p(x))$, obtenemos:

$$\theta(p) = 1 \cdot 1^*(p) + 2 \cdot x^*(p) + 3 \cdot (x^2)^*(p).$$

Como esto se cumple para todo polinomio $p(x)$, la forma lineal es:

$$\theta = 1^* + 2x^* + 3(x^2)^*.$$

Por lo tanto, el vector de coordenadas de θ en la base dual B^* es:

$$[\theta]_{B^*} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Apartado d) Encontrar las coordenadas de $f^*(\theta)$ en la base $B_{\mathbb{R}^3}^*$

Método 1: Por definición de aplicación traspuesta (Composición)

Por definición, $f^*(\theta) = \theta \circ f$. Así, evaluando sobre un vector genérico $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$f^*(\theta)(a, b, c) = \theta(f(a, b, c)).$$

Sustituimos la definición de la imagen de f :

$$f(a, b, c) = \underbrace{(a + b + 2c)}_{\alpha} + \underbrace{(2a + c)}_{\beta} x + \underbrace{(b + c)}_{\gamma} x^2.$$

En el apartado anterior demostramos que para cualquier polinomio, $\theta(p) = \alpha + 2\beta + 3\gamma$. Sustituimos los valores de α , β y γ de nuestra imagen:

$$\begin{aligned} f^*(\theta)(a, b, c) &= (a + b + 2c) + 2(2a + c) + 3(b + c) \\ &= a + b + 2c + 4a + 2c + 3b + 3c \\ &= 5a + 4b + 7c. \end{aligned}$$

Como los sensores de coordenadas de la base dual de $\mathbb{R}^3$ son $e_1^*(a, b, c) = a$, $e_2^*(a, b, c) = b$ y $e_3^*(a, b, c) = c$, tenemos:

$$f^*(\theta) = 5e_1^* + 4e_2^* + 7e_3^* \implies [f^*(\theta)]_{B_{\mathbb{R}^3}^*} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Método 2: Mediante producto matricial (El método más rápido y elegante)

La teoría nos asegura que podemos operar directamente con las coordenadas usando la matriz de la traspuesta:

$$[f^*(\theta)]_{B_{\mathbb{R}^3}^*} = [f^*]_{B^*, B_{\mathbb{R}^3}^*} \cdot [\theta]_{B^*}.$$

Multiplicamos la matriz A^t por el vector obtenido en el apartado c):

$$[f^*(\theta)]_{B_{\mathbb{R}^3}^*} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(1) + 2(2) + 0(3) \\ 1(1) + 0(2) + 1(3) \\ 2(1) + 1(2) + 1(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

¡Ambos métodos coinciden perfectamente! Mostrar ambos en la pizarra con el estudiante le dará una excelente comprensión de cómo la teoría matricial simplifica el cálculo abstracto.

3. Resolución paso a paso: Ejercicio 2 (Clasificación sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$)

Clasificar sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$ el endomorfismo cuya matriz asociada en la base estándar es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se pide la descomposición en $\mathbb{K}[x]$ -módulos monógenos, la forma de Jordan y una base de Jordan.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Paso 1: Cálculo del Polinomio Característico

Calculamos el determinante de $(x \text{Id} - M)$:

$$x \text{Id} - M = \begin{pmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & -1 & x \end{pmatrix}.$$

Desarrollando por la primera fila:

$$c_M(x) = (x-1) \cdot \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = (x-1)(x^2+1).$$

Los autovalores son las raíces de este polinomio: $x = 1$ y las soluciones de $x^2 + 1 = 0$.

3.1. Estudio sobre el cuerpo de los números reales ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

1. Polinomio característico y minimal:

Sobre $\mathbb{R}$, el término $x^2 + 1$ no tiene raíces reales (es irreducible). Por lo tanto, el polinomio característico no se puede descomponer en factores lineales:

$$c_M(x) = (x-1)(x^2+1).$$

Como los factores del polinomio característico son irreducibles y tienen exponente 1, el polinomio minimal debe ser exactamente el mismo:

$$p_M(x) = (x-1)(x^2+1).$$

2. Descomposición en módulos monógenos:

Cada factor irreducible en el polinomio minimal genera un sumando directo en la descomposición del espacio como módulo:

$$\mathbb{R}_M^3 \simeq \mathbb{R}[x]/(x-1) \oplus \mathbb{R}[x]/(x^2+1).$$

3. Forma de Jordan Real:

Sobre los reales, el factor cuadrático irreducible representa un bloque de rotación de 90° de tamaño 2×2 . La forma canónica real de Jordan mantiene la estructura original de bloques:

$$J_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Base de Jordan Real:

Como la matriz original M ya es escrita en su forma real de Jordan, la base adecuada es la base estándar de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = (e_1, e_2, e_3).$$

En efecto, $Me_1 = e_1$ (autovector de $\lambda = 1$), mientras que el subespacio generado por $\{e_2, e_3\}$ es invariante y su comportamiento es una rotación pura ($Me_2 = e_3$ y $Me_3 = -e_2$).

3.2. Estudio sobre el cuerpo de los números complejos ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

1. Polinomio característico y minimal complejos:

Sobre el cuerpo complejo, el polinomio cuadrático se descompone por completo: $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$. Así:

$$c_M(x) = (x - 1)(x - i)(x + i).$$

El polinomio minimal tiene las mismas raíces con exponente 1:

$$p_M(x) = (x - 1)(x - i)(x + i).$$

Como el polinomio característico tiene todas sus raíces distintas y pertenecen a $\mathbb{C}$, el endomorfismo es **diagonalizable** sobre $\mathbb{C}$.

2. Descomposición en módulos monógenos:

Al romperse en tres factores lineales independientes, la estructura de módulos queda:

$$\mathbb{C}_M^3 \simeq \mathbb{C}[x]/(x - 1) \oplus \mathbb{C}[x]/(x - i) \oplus \mathbb{C}[x]/(x + i).$$

3. Forma de Jordan Compleja:

Al diagonalizar, la forma de Jordan es simplemente una matriz diagonal con los autovalores:

$$J_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

4. Base de Jordan Compleja (Vectores propios):

Calculamos los autovectores asociados a cada autovalor resolviendo $(M - \lambda \text{Id})v = 0$:

- **Para $\lambda = 1$:** Tenemos:

$$(M - \text{Id})v = 0 \implies \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo que implica $y = 0, z = 0$. El autovector es:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- **Para $\lambda = i$:** Tenemos:

$$(M - i \text{Id})v = 0 \implies \begin{pmatrix} 1 - i & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde se deduce $x = 0$ y $-iy - z = 0 \implies z = -iy$.

Fijando $y = 1$, obtenemos el autovector:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

■ **Para $\lambda = -i$:** Tenemos:

$$(M + i \text{Id})v = 0 \implies \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & i & -1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde se deduce $x = 0$ y $iy - z = 0 \implies z = iy$.

Fijando $y = 1$, obtenemos el autovector:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

La base de Jordan (que es una base de autovectores) es:

$$\mathcal{B}_C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right).$$

4. Resolución paso a paso: Ejercicio 3 (Estructuras de Jordan)

Calcular todos los endomorfismos f de $\mathbb{R}^4$ cuyo polinomio característico es:

$$c_f(x) = (x + 29)^2(x + 33)^2$$

y que únicamente poseen dos vectores propios linealmente independientes.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Paso 1: Identificación de Autovalores y Multiplicidades Algebraicas

El polinomio característico tiene dos raíces reales:

- $\lambda_1 = -29$ con multiplicidad algebraica $m_a(-29) = 2$.
- $\lambda_2 = -33$ con multiplicidad algebraica $m_a(-33) = 2$.

Paso 2: Interpretación geométrica de los Autovectores independientes

El enunciado exige que la dimensión total del espacio de autovectores sea exactamente 2:

$$\dim E_{-29} + \dim E_{-33} = 2.$$

Como cada autovalor debe poseer obligatoriamente al menos un autovector no nulo asociado ($\dim E_\lambda \geq 1$), la única distribución matemática posible es:

$$\dim E_{-29} = 1 \quad \text{y} \quad \dim E_{-33} = 1.$$

Esto significa que la multiplicidad geométrica de ambos autovalores es 1 ($m_g = 1$).

Paso 3: Construcción de la Estructura de Bloques de Jordan

Recordemos la regla fundamental: *El número de bloques de Jordan asociados a un autovalor λ es igual a su multiplicidad geométrica $m_g(\lambda)$.*

- Para $\lambda = -29$: Hay un único bloque de Jordan. Como su dimensión total en la diagonal debe ser $m_a = 2$, se trata de un único bloque de tamaño 2: $J_2(-29)$.
- Para $\lambda = -33$: Análogamente, se genera un único bloque de Jordan de tamaño 2: $J_2(-33)$.

Por tanto, la forma de Jordan de cualquier endomorfismo que cumpla las condiciones es:

$$J = J_2(-29) \oplus J_2(-33) = \begin{pmatrix} -29 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -29 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -33 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -33 \end{pmatrix}.$$

Paso 4: Obtención del Polinomio Anulador (Minimal)

El exponente de cada factor $(x - \lambda)$ en el polinomio minimal coincide con el

tamaño del bloque de Jordan más grande de ese autovalor. Como el bloque más grande para ambos autovalores es de tamaño 2, el polinomio minimal es:

$$p_f(x) = (x + 29)^2(x + 33)^2.$$

Paso 5: Descomposición en módulos monógenos

Usando los factores del polinomio minimal (los ideales anuladores principales), la descomposición es:

$$\mathbb{R}_f^4 \simeq \mathbb{R}[x]/(x + 29)^2 \oplus \mathbb{R}[x]/(x + 33)^2.$$

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Paso 6: Descripción de todos los endomorfismos que cumplen la condición

Cualquier matriz que cumpla los requisitos debe ser semejante a la forma de Jordan J . Dos matrices son semejantes si representan al mismo endomorfismo bajo distintas bases.

Por tanto, el conjunto de todos los endomorfismos buscados es la **clase de semejanza** de J :

$$S = \{A \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid A = PJP^{-1}, \text{ con } P \in GL_4(\mathbb{R})\},$$

donde P es cualquier matriz invertible de cambio de base (de tamaño 4×4).

Paso 7: Construcción de la Base de Jordan

Para comprender la estructura de cambio de base, necesitamos encontrar una base de Jordan $\mathcal{B}_J$ para una matriz con bloques de tamaño 2, buscamos vectores que generen cadena de Jordan:

1. **Cadena para $\lambda = -29$:** Buscamos un vector generalizado u tal que esté en el núcleo de $(f + 29 \text{Id})^2$ pero no en el de $(f + 29 \text{Id})$:

$$(f + 29 \text{Id})^2 u = 0, \quad \text{pero} \quad (f + 29 \text{Id})u \neq 0.$$

Si definimos el autovector propio como $u_{\text{propio}} = (f + 29 \text{Id})u$, tenemos la cadena:

$$u \xrightarrow{f+29 \text{Id}} u_{\text{propio}} \xrightarrow{f+29 \text{Id}} 0.$$

2. **Cadena para $\lambda = -33$:** De la misma forma, buscamos un vector generalizado v tal que:

$$(f + 33 \text{Id})^2 v = 0, \quad \text{pero} \quad (f + 33 \text{Id})v \neq 0.$$

El autovector propio es $v_{\text{propio}} = (f + 33 \text{Id})v$, dando la cadena:

$$v \xrightarrow{f+33 \text{Id}} v_{\text{propio}} \xrightarrow{f+33 \text{Id}} 0.$$

Colocando los vectores en el orden que genera la matriz de Jordan inferior J :

$$\mathcal{B}_J = (u, (f + 29 \text{Id})u, v, (f + 33 \text{Id})v).$$

Explicación del orden para el Tutor:

- Si evaluamos el primer vector u en la aplicación f :

$$f(u) = (f + 29 \text{Id})u - 29u = -29u + (f + 29 \text{Id})u.$$

Esto produce las coordenadas $(-29, 1, 0, 0)^t$, que corresponden a la primera columna de J .

- Si evaluamos el segundo vector $(f + 29 \text{Id})u$ en f :

$$f((f + 29 \text{Id})u) = -29(f + 29 \text{Id})u.$$

Esto da las coordenadas $(0, -29, 0, 0)^t$, con respecto a la segunda columna de J .

El mismo razonamiento aplica para la pareja $(v, (f + 33 \text{Id})v)$, completando la matriz por bloques.

5. Resumen y consejos para Tutor durante la clase

Conclusión fundamental

Resumen rápido de conceptos clave

1. **Aplicación Traspuesta:** Invierte el sentido del espacio. Si $f : V \rightarrow W$, entonces $f^* : W^* \rightarrow V^*$. Matricialmente: $[f^*] = [f]^t$. Para calcular coordenadas se usa $f^*(\theta) = \theta \circ f$.
2. **Base Dual:** Sensores de coordenadas. Cumplen $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$. Permiten reescribir cualquier forma como combinación de las coordenadas de la base de partida.
3. **Polinomio Característico vs. Minimal:** El característico te dice **qué autovalores existen** y su tamaño total. El minimal te dice la **estructura de los bloques de Jordan** (el grado máximo de cada bloque).
4. **Bloques de Jordan:** Aparecen cuando la multiplicidad algebraica de un autovalor es mayor que su multiplicidad geométrica (falta de autovectores independientes).

Método paso a paso

Guión sugerido para explicar los ejercicios a Alejandra

- **Paso 1: Dibujar en la pizarra** el concepto de forma lineal y base dual en $\mathbb{R}^2$ usando los primeros gráficos de esta guía. Esto hará que Alejandra “vea” la materia antes de resolver ecuaciones.
- **Paso 2: En el Ejercicio 1**, resalta que la traspuesta cambia las dimensiones de bases de partida y llegada, y haz hincapié en que multiplicar por A^t (Método 2) es equivalente a la composición directa (Método 1).
- **Paso 3: En el Ejercicio 2**, enfócate en el cambio de cuerpo. Muestra cómo sobre los reales la matriz no se puede simplificar más porque el polinomio $x^2 + 1$ no se descompone, mientras que en los complejos sí, convirtiéndose en una diagonal.
- **Paso 4: En el Ejercicio 3**, explica la diferencia entre autovectores (físicos, geométricos) y autovalores (algebraicos). Haz el diagrama de flechas de las cadenas de Jordan para explicar el orden de la base de Jordan inferior.