

Álgebra Lineal

Espacio Dual, Base Dual y Aplicación Traspuesta

1. Espacios duales

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. El **espacio dual** de V , denotado por V^* , es el conjunto de todas las aplicaciones lineales que van de V al cuerpo $\mathbb{K}$. Es decir,

Definición de Espacio Dual

$$V^* = \{\omega : V \rightarrow \mathbb{K} \mid \omega \text{ es lineal}\}.$$

Los elementos de V^* se llaman **formas lineales** (o covectores).

Una forma lineal toma un vector y devuelve un escalar. Por tanto, una forma lineal no es un vector del espacio original, sino una aplicación que sirve para **medir vectores**.

Ejemplo en $\mathbb{R}^2$

Si $V = \mathbb{R}^2$, entonces la aplicación

$$\omega(x, y) = 2x + y$$

es una forma lineal, porque recibe un vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y devuelve un número real. Evaluando en algunos vectores particulares:

$$\omega(1, 0) = 2(1) + 0 = 2,$$

$$\omega(-1, 2) = 2(-1) + 2 = 0.$$

Visualización Geométrica

Geométricamente, la forma lineal $\omega(x, y) = 2x + y$ puede visualizarse mediante sus **líneas de nivel**. Para cada número real c , la ecuación

$$\omega(x, y) = c \implies 2x + y = c$$

define una recta. Por tanto, todas las rectas correspondientes a los distintos niveles de c son paralelas en el plano.

Evaluar un vector v mediante ω significa calcular el número real c que produce. Si $\omega(v) = c$, el vector v “cae” sobre la recta de nivel c .

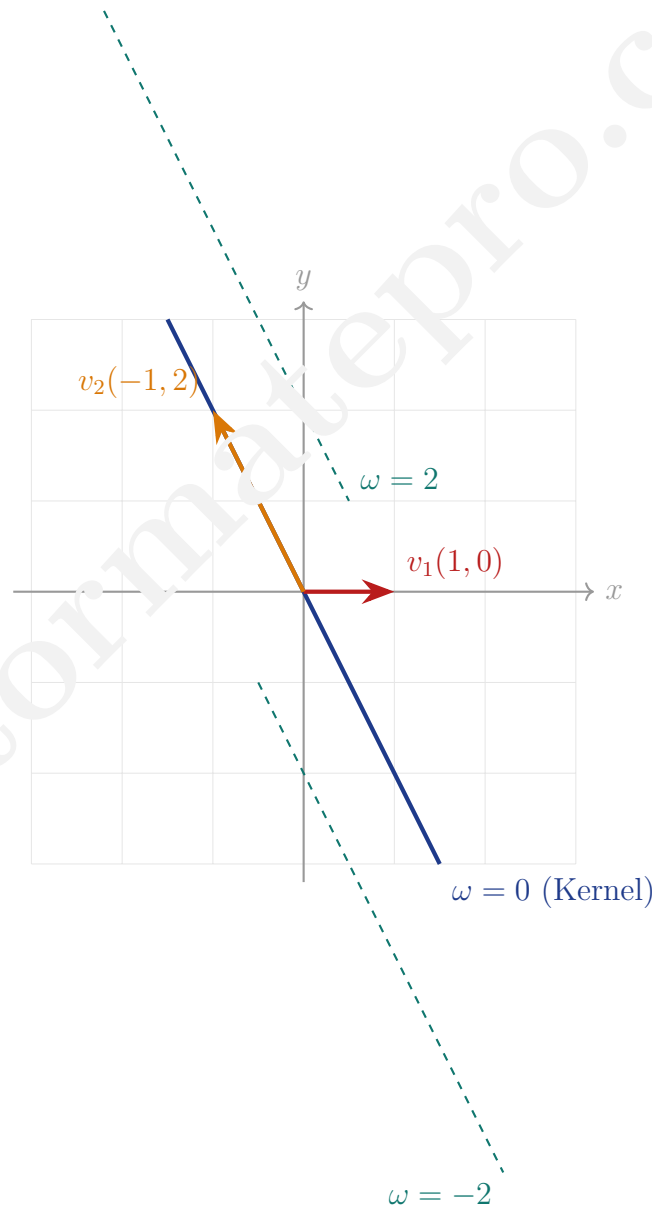


Figura 1: Representación de la forma lineal $\omega(x, y) = 2x + y$ mediante sus líneas de nivel. El vector $v_2 = (-1, 2)$ pertenece al núcleo (nivel $\omega = 0$). El vector $v_1 = (1, 0)$ atraviesa las líneas hasta alcanzar el nivel $\omega = 2$.

El caso más importante es el nivel cero. El **núcleo** (o Kernel) de ω es el subespacio de todos los vectores que se evalúan en cero:

$$\text{Ker}(\omega) = \{v \in V : \omega(v) = 0\}.$$

En nuestro ejemplo anterior:

$$\text{Ker}(\omega) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -2x\}.$$

Por tanto, en $\mathbb{R}^2$, el núcleo de una forma lineal no nula es una recta que pasa por el origen.

2. Bases duales

Supongamos que V tiene dimensión finita n y que

$$B = \{v_1, \dots, v_n\}$$

es una base de V .

Base Dual

Existe una base única del espacio dual V^* , llamada **base dual**, que se denota por

$$B^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$$

y se define mediante la prop. valdca:

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij},$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Esto significa que el funcional lineal v_i^* actúa como un “sensor” que detecta exactamente la coordenada i -ésima de un vector escrito en la base B .

Demostración de la detección de coordenadas

Si expresamos un vector genérico $v \in V$ como combinación lineal de los elementos de la base B :

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n,$$

entonces, aplicando la forma lineal v_i^* y utilizando su propiedad de linealidad:

$$v_i^*(v) = v_i^*(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 v_i^*(v_1) + \dots + \alpha_n v_i^*(v_n).$$

Por definición de la base dual, todos los términos $v_i^*(v_j)$ se anulan para $j \neq i$, quedando únicamente el término para $j = i$:

$$v_i^*(v) = \alpha_i.$$

En particular, si $n \geq 4$, entonces

$$v_4^*(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_4.$$

Es decir, v_4^* extrae la cuarta coordenada del vector.

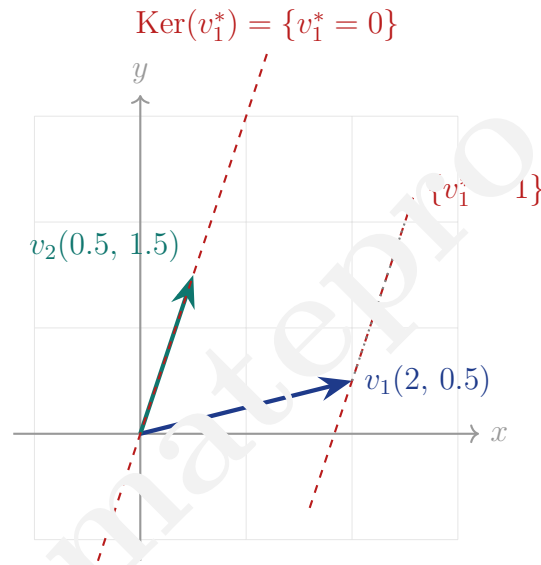


Figura 2: Geometría de la base dual en $\mathbb{R}^2$. Para la base $B = (v_1, v_2)$, la forma dual v_1^* tiene como núcleo la recta generada por v_2 (para asegurar $v_1^*(v_2) = 0$), y su nivel de unidad $\{v_1^* = 1\}$ pasa por el extremo de v_1 .

3. Aplicación traspuesta

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal. La **aplicación traspuesta** de f es

$$f^* : W^* \rightarrow V^*.$$

Es fundamental notar que f va de V hacia W , mientras que f^* va en dirección opuesta: de W^* hacia V^* .

La definición de la aplicación traspuesta es:

$$f^*(\omega) = \omega \circ f, \quad \forall \omega \in W^*.$$

Esto significa que para cada vector $v \in V$:

$$f^*(\omega)(v) = \omega(f(v)).$$

Esquema de composición

La evaluación se puede seguir mediante el siguiente diagrama de composición:

$$v \in V \xrightarrow{f} f(v) \in W \xrightarrow{\omega} \omega(f(v)) \in \mathbb{K}.$$

Primero se aplica la transformación lineal f al vector y después se mide el resultado usando la forma lineal ω .

Ejemplo de evaluación

Supongamos que $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \mathbb{R}^2$. Consideremos la aplicación lineal f tal que

$$f(1, 1) = (2, 2),$$

y la forma lineal $\omega(u, v) = u + v$. Queremos evaluar $f^*(\omega)$ en el vector $(1, 1)$:

$$f^*(\omega)(1, 1) = \omega_{\mathbb{R}^2}(f(1, 1)).$$

Como $f(1, 1) = (2, 2)$, tenemos:

$$f^*(\omega)(1, 1) = \omega(2, 2) = 2 + 2 = 4.$$

4. Ejercicio: aplicación traspuesta

Sea la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$$

dada por

$$f(a, b, c) = (a + b + 2c) + (2a + c)x + (b + c)x^2.$$

Tomamos las bases estándar:

$$B_{\mathbb{R}^3} = \{e_1, e_2, e_3\},$$

donde

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1),$$

y

$$B_{\mathbb{R}_{\leq 2}[x]} = \{1, x, x^2\}.$$

También consideramos la forma lineal $\theta : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\theta(p(x)) = p(1) + p'(1).$$

El objetivo es estudiar la aplicación traspuesta

$$f^* : (\mathbb{R}_{\leq 2}[x])^* \rightarrow (\mathbb{R}^3)^*.$$

Paso 1: calcular la matriz de f

Para calcular la matriz de f en las bases estándar, evaluamos la aplicación lineal sobre los vectores de la base de partida $B_{\mathbb{R}^3}$:

1. **Para** $e_1 = (1, 0, 0)$:

$$f(1, 0, 0) = (1 + 0 + 0) + (2 \cdot 1 + 0)x + (0 + 0)x^2 = 1 + 2x.$$

Sus coordenadas en la base de llegada $B_{\mathbb{R}_{\leq 2}[x]}$ son:

$$[f(e_1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. **Para** $e_2 = (0, 1, 0)$:

$$f(0, 1, 0) = (0 + 1 + 0) + (2 \cdot 0 + 1)x + (1 + 0)x^2 = 1 + x^2.$$

Sus coordenadas son:

$$[f(e_2)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. **Para** $e_3 = (0, 0, 1)$:

$$f(0, 0, 1) = (0 + 0 + 2) + (2 \cdot 0 + 1)x + (0 + 1)x^2 = 2 + x + x^2.$$

Sus coordenadas son:

$$[f(e_3)]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Colocando estas coordenadas como las columnas de la matriz, obtenemos la matriz asociada a f :

$$A = [f]_{B_{\mathbb{R}^3}, B_{\mathbb{R}_{\leq 2}[x]}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Paso 2: matriz de la aplicación traspuesta

La matriz de la aplicación traspuesta f^* en las bases duales es la traspuesta de la matriz de f :

$$[f^*]_{B^*, B_{\mathbb{R}^3}^*} = A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Paso 3: calcular $\text{Ker}(f^*)$

Para calcular el núcleo de f^* , resolvemos la ecuación homogénea $A^t \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto equivale al sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0, \\ \alpha + \gamma = 0, \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

De la segunda ecuación obtenemos $\gamma = -\alpha$, y de la primera $\alpha = -2\beta \implies \gamma = 2\beta$. Sustituyendo estos valores en la tercera ecuación.

$$2(-2\beta) + \beta + 2\beta = 0 \implies -4\beta + 3\beta = 0 \implies -\beta = 0 \implies \beta = 0.$$

Como $\beta = 0$, obtenemos inmediatamente que:

$$\alpha = 0, \quad \gamma = 0.$$

Por tanto, la única solución es la solución trivial $\alpha = \beta = \gamma = 0$, lo que implica que:

$$\text{Ker}(f^*) = \{0\}.$$

La base de este núcleo es la base vacía, que se suele denotar por $\emptyset$.

Paso 4: calcular las coordenadas de θ

Consideremos un polinomio genérico $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. Evaluamos el polinomio y su derivada en $x = 1$:

$$p(1) = \alpha + \beta + \gamma.$$

Como la derivada es $p'(x) = \beta + 2\gamma x$, tenemos:

$$p'(1) = \beta + 2\gamma.$$

Sustituyendo en la definición de la forma lineal θ :

$$\theta(p(x)) = p(1) + p'(1) = (\alpha + \beta + \gamma) + (\beta + 2\gamma) = \alpha + 2\beta + 3\gamma.$$

Por la definición de los funcionales de la base dual $B^* = \{1^*, x^*, (x^2)^*\}$ sobre el polinomio:

$$1^*(p) = \alpha, \quad x^*(p) = \beta, \quad (x^2)^*(p) = \gamma.$$

Reescribiendo θ :

$$\theta = 1 \cdot 1^* + 2 \cdot x^* + 3 \cdot (x^2)^*.$$

Por lo tanto, sus coordenadas en la base dual B^* son:

$$[\theta]_{B^*} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Paso 5: calcular $f^*(\theta)$

Podemos obtener las coordenadas de la traspuesta $f^*(\theta)$ mediante dos métodos complementarios:

Método 1: Por composición de aplicaciones

Utilizamos la definición $f^*(\theta) = \theta \circ f$. Evaluamos sobre un vector genérico $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$f^*(\theta)(a, b, c) = \theta(f(a, b, c)).$$

Sustituyendo la imagen de f :

$$f(a, b, c) = \underbrace{(a + b + 2c)}_{\alpha} + \underbrace{(2a + c)}_{\beta} x + \underbrace{(b + c)}_{\gamma} x^2.$$

Aplicamos la expresión obtenida en el Paso 4 para la forma lineal θ :

$$\begin{aligned} f^*(\theta)(a, b, c) &= \alpha + 2\beta + 3\gamma \\ &= (a + b + 2c) + 2(2a + c) + 3(b + c) \\ &= a + b + 2c + 4a + 2c + 3b + 3c \\ &= 5a + 4b + 7c. \end{aligned}$$

Por tanto, el funcional resultante es:

$$f^*(\theta) = 5e_1^* + 4e_2^* + 7e_3^*,$$

y sus coordenadas en la base dual $B_{\mathbb{R}^3}^*$ son:

$$[f^*(\theta)]_{B_{\mathbb{R}^3}^*} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Método 2: Mediante producto matricial

La teoría garantiza que las coordenadas se pueden calcular multiplicando la matriz de la aplicación traspuesta por el vector de coordenadas del funcional:

$$[f^*(\theta)]_{B_{\mathbb{R}^3}^*} = [f^*]_{B^*, B_{\mathbb{R}^3}^*} \cdot [\theta]_{B^*} = A^t \cdot [\theta]_{B^*}.$$

Efectuando el producto con los resultados de los pasos 2 y 4:

$$[f^*(\theta)]_{B_{\mathbb{R}^3}^*} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(1) + 2(2) + 0(3) \\ 1(1) + 0(2) + 1(3) \\ 2(1) + 1(2) + 1(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ambos métodos coinciden con precisión matemática absoluta.

Resumen de Ideas Importantes

- El dual V^* está formado por todas las aplicaciones lineales de V al cuerpo $\mathbb{K}$.
- Una forma lineal toma un vector y devuelve un escalar, mide vectores.
- La base dual sirve para extraer coordenadas: $\omega_i(v) = \alpha_i$ donde α_i es la i -ésima coordenada de v en la base original.
- Si $f : V \rightarrow W$, la traspuesta es $f^* : W^* \rightarrow V^*$ y cumple que $f^*(\omega) = \omega \circ f$.
- La matriz de la traspuesta en bases duales es la traspuesta de la matriz de la aplicación original: $[f^*] = [f]^t$