

Resolución Completa y Guía de Geometría Analítica

Estudio detallado de posiciones relativas,
paralelogramos, ángulos, distancias y
perpendicularidad en el plano real

Preparado especialmente para:

Estudiante de Bachillerato

Idea visual clave / Intuición

Idea central de esta guía:

La geometría analítica conecta de forma magistral las expresiones algebraicas con sus representaciones espaciales en el plano. En este documento se resuelven detalladamente cada uno de los ejercicios del examen de geometría analítica, combinando el análisis vectorial de clase con interpretaciones alternativas (pendientes y fórmulas clásicas) para lograr un dominio conceptual completo de la materia.

Índice

1. Rectas Paralelas y Distancia entre Ellas	3
1.1. Cálculo del Parámetro a para que las Rectas sean Paralelas	3
1.2. Distancia entre las Rectas Paralelas	6
2. Estudio de un Paralelogramo en el Plano	9
2.1. Determinación del Cuarto Vértice D	9
2.2. Área del Paralelogramo	11
3. Ángulo que Forman Dos Rectas	13
3.1. Resolución Analítica del Ángulo	13
4. Distancia de un Punto a una Recta	16
4.1. Resolución del Problema	16
5. Rectas Perpendiculares y Cálculo de Áreas de Triángulos	18
5.1. Construcción de Rectas e Intersección	18
5.2. Cálculo del Área del Triángulo ABC (EXTRA 1)	20
6. Determinación de Parámetros en Fórmulas de Distancia	23
6.1. Resolución del Problema con Parámetro	23

1. Rectas Paralelas y Distancia entre Ellas

En este primer ejercicio se analiza cómo determinar cuándo dos rectas son paralelas a partir de sus ecuaciones en distintas formas y cómo calcular la distancia que las separa.

Paralelismo entre Rectas en el Plano

Dadas dos rectas r y s en el plano coordenado $\mathbb{R}^2$, son **paralelas** ($r \parallel s$) si tienen la misma dirección. Esto se puede analizar bajo dos enfoques equivalentes:

1. **Enfoque analítico (Pendientes):** Si las rectas se escriben en su forma explícita $y = mx + n$, sus pendientes deben ser iguales:

$$m_r = m_s$$

2. **Enfoque vectorial (Vectores normales/directores):** Si las rectas se expresan en su forma general $Ax + By + C = 0$, sus vectores normales $\vec{n}_r = (A_r, B_r)$ y $\vec{n}_s = (A_s, B_s)$ deben ser proporcionales:

$$\vec{n}_s = k \cdot \vec{n}_r \iff (A_s, B_s) = k \cdot (A_r, B_r) \implies \frac{A_s}{A_r} = \frac{B_s}{B_r} = k$$

1.1. Cálculo del Parámetro a para que las Rectas sean Paralelas

Sean las rectas:

$$r : y = \frac{1}{2} - \frac{7x}{6}, \quad s : -14x + ay - 7 = 0$$

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 1 – Apartado a) Calcula cuánto debe valer el parámetro a para que las rectas r y s sean paralelas.

Solución Paso a Paso:

Método paso a paso

Método A: Utilizando Vectores Normales (Preferencia de las Notas de Clase)

1. **Expresar la recta r en su forma general $Ax + By + C = 0$:**
Partimos de la ecuación explícita de r ,

$$y = \frac{1}{2} - \frac{7}{6}x$$

Multiplicamos todos los términos por 6 para eliminar denominadores:

$$6y = 3 - 7x \implies 7x + 6y - 3 = 0$$

El vector normal de r es $\vec{n}_r = (7, 6)$.

2. **Extraer el vector normal de la recta s :** La ecuación de s es $-14x + ay - 7 = 0$, por lo que su vector normal es $\vec{n}_s = (-14, a)$.
3. **Plantear la condición de proporcionalidad de vectores normales:** Para que sean paralelas, debe existir una constante k tal que:

$$\vec{n}_s = k \cdot \vec{n}_r \implies (-14, a) = k \cdot (7, 6)$$

Separamos en componentes:

$$\begin{cases} -14 = 7k \implies k = -2 \\ a = 6k \implies a = 6(-2) = -12 \end{cases}$$

Por tanto, el valor del parámetro debe ser $a = -12$.

Método paso a paso**Método B: Utilizando las Pendientes (Camino Analítico Alternativo)**

1. **Identificar la pendiente de r :** Dado que r está escrita como $y = -\frac{7}{6}x + \frac{1}{2}$, su pendiente es directamente:

$$m_r = -\frac{7}{6}$$

2. **Despejar y en la ecuación de s para hallar su pendiente:**

$$-14x + ay - 7 = 0 \implies ay = 14x + 7 \implies y = \frac{14}{a}x + \frac{7}{a} \implies m_s = \frac{14}{a}$$

3. **Igualar ambas pendientes:**

$$m_r = m_s \implies -\frac{7}{6} = \frac{14}{a} \implies -7a = 84 \implies a = \frac{84}{-7} = -12$$

Ambos métodos nos llevan, de forma consistente, a la solución final de $a = -12$.

¡Mucho cuidado con las fracciones al pasar a forma general! En el paso $6(\frac{7}{6}x + y - \frac{1}{2}) = 0$, asegúrate de multiplicar cada sumando de manera correcta. Un error común es escribir $7x + 6y - 1/2 = 0$ u olvidar cambiar de signo los términos al trasponerlos al lado izquierdo.

1.2. Distancia entre las Rectas Paralelas

Sustituyendo $a = -12$, las ecuaciones de nuestras rectas son:

$$r : 7x + 6y - 3 = 0, \quad s : -14x - 12y - 7 = 0$$

Cálculo de la Distancia entre Rectas Paralelas

La distancia entre dos rectas paralelas se puede determinar mediante dos técnicas:

1. **Distancia de un punto a una recta:** Se elige un punto cualquiera $P(x_0, y_0)$ que pertenezca a la recta r , y se calcula la distancia de ese punto a la recta s mediante la fórmula clásica:

$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{|A_s x_0 + B_s y_0 + C_s|}{\sqrt{A_s^2 + B_s^2}}$$

2. **Fórmula directa de paralelas:** Si escalamos ambas ecuaciones para que tengan los mismos coeficientes en x e y ($Ax + By + C_1 = 0$ y $Ax + By + C_2 = 0$), la distancia es:

$$d(r, s) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 1 – Apartado b) Halla la distancia entre las dos rectas para ese valor del parámetro.

Solución Paso a Paso:

Método paso a paso**Método A: Distancia de Punto a Recta (Preferencia de las Notas de Clase)**

1. **Elegir un punto conveniente P de la recta r :** Tomemos $x_0 = 3$ y sustituyamos en la ecuación de r :

$$y_0 = \frac{1}{2} - \frac{7(3)}{6} = \frac{1}{2} - \frac{21}{6} = \frac{3}{6} - \frac{21}{6} = -\frac{18}{6} = -3$$

Por tanto, el punto $P(3, -3) \in r$.

2. **Calcular la distancia de P a la recta $s : -14x - 12y - 7 = 0$:**
Aplicamos la fórmula de distancia punto-recta:

$$d(P, s) = \frac{|-14(3) - 12(-3) - 7|}{\sqrt{(-14)^2 + (-12)^2}} = \frac{|-42 + 36 - 7|}{\sqrt{196 + 144}} = \frac{|-13|}{\sqrt{340}} = \frac{13}{\sqrt{340}}$$

Como $\sqrt{340} = \sqrt{4 \cdot 85} = 2\sqrt{85}$, racionalizamos el resultado:

$$d = \frac{13}{2\sqrt{85}} = \frac{13\sqrt{85}}{2 \cdot 85} = \frac{13\sqrt{85}}{170} \approx 0.705 \text{ u}$$

Método paso a paso**Método B: Usando la Fórmula Directa entre Paralelas**

1. **Normalizar los coeficientes de las rectas:** Tenemos $r : 7x + 6y - 3 = 0$. Para $s : -14x - 12y - 7 = 0$, dividimos toda la ecuación por -2 :

$$7x + 6y + \frac{7}{2} = 0$$

Ahora ambas tienen $A = 7$ y $B = 6$, con $C_1 = -3$ y $C_2 = \frac{7}{2}$.

2. **Aplicar la fórmula:**

$$d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|\frac{7}{2} - (-3)|}{\sqrt{7^2 + 6^2}} = \frac{|\frac{7}{2} + \frac{6}{2}|}{\sqrt{49 + 36}} = \frac{\frac{13}{2}}{\sqrt{85}} = \frac{13}{2\sqrt{85}} = \frac{13\sqrt{85}}{170}$$

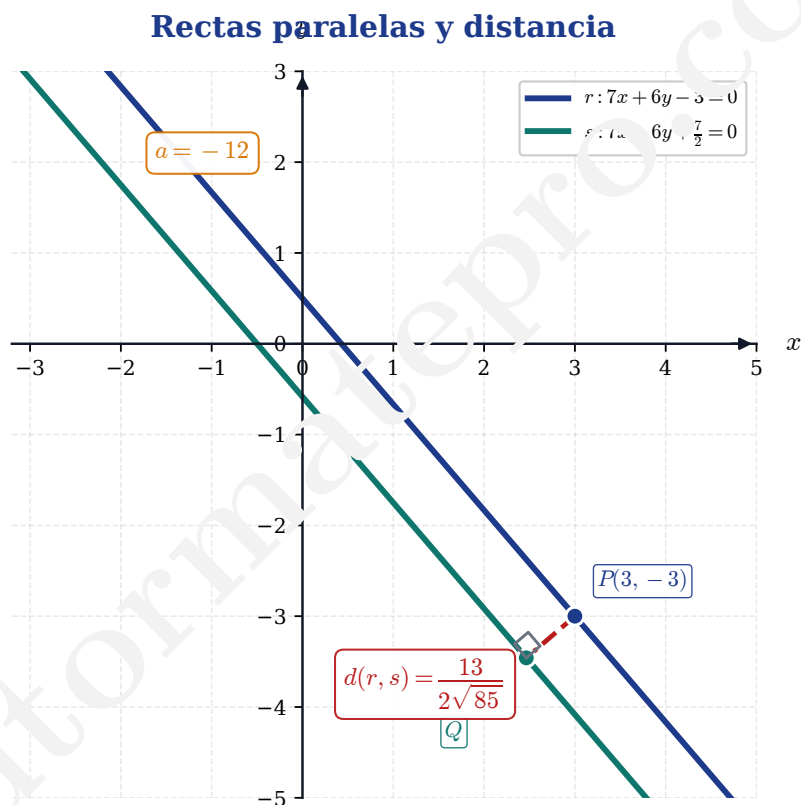


Figura 1: Representación gráfica de las rectas paralelas r y s con $a = -12$. Se muestra el punto $P(3, -3)$ elegido sobre r y la proyección perpendicular de la distancia mínima $d \approx 0.70$ sobre la recta s .

2. Estudio de un Paralelogramo en el Plano

Este ejercicio aborda la geometría de los paralelogramos mediante vectores y cómo calcular su área a partir de determinantes algebraicos.

Propiedades Vectoriales de un Paralelogramo

En un paralelogramo $ABCD$, los vértices adyacentes están ordenados cíclicamente. Esto implica que los vectores formados por los lados opuestos son idénticos tanto en módulo, dirección como en sentido:

$$\vec{AB} = \vec{DC} \quad \text{y} \quad \vec{AD} = \vec{BC}$$

A partir de estas igualdades, si conocemos las coordenadas de tres puntos (por ejemplo, A , B y C), podemos determinar de manera única las coordenadas del cuarto vértice D :

$$D = A + \vec{AD} = A + \vec{BC}$$

2.1. Determinación del Cuarto Vértice D

Se dan los puntos:

$$A(1, 2), \quad B(-1, 5), \quad C(2, 7)$$

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 2 – Apartado a) Calcula cuáles son las coordenadas del punto D .
Solución Paso a Paso:

1. **Calcular el vector $\vec{BC}$:** Hacemos el extremo menos el origen:

$$\vec{BC} = C - B = (2, 7) - (-1, 5) = (2 - (-1), 7 - 5) = (3, 2)$$

2. **Calcular el punto D a partir de A usando el vector anterior:** Como se cumple que $\vec{AD} = \vec{BC}$, tenemos:

$$D - A = \vec{BC} \implies D = A + \vec{BC}$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$D = (1, 2) + (3, 2) = (1 + 3, 2 + 2) = (4, 4)$$

Por tanto, las coordenadas de nuestro punto son $D(4, 4)$.

3. **Comprobación analítica:** Podemos comprobar que los vectores opuestos $\vec{AB}$ y $\vec{DC}$ también coinciden:

$$\vec{AB} = B - A = (-1, 5) - (1, 2) = (-2, 3)$$

$$\vec{DC} = C - D = (2, 7) - (4, 4) = (-2, 3)$$

Como $\vec{AB} = \vec{DC}$, el punto D es geoméricamente correcto.

¡Cuidado con el orden de las letras! Es un error habitual asumir que la igualdad es $\vec{AD} = \vec{CB}$. Nota que el vector $\vec{CB}$ tiene sentido opuesto a $\vec{BC}$, de modo que $\vec{CB} = (-3, -2)$. Si usas ese sentido erróneo, obtendrás un punto incorrecto $D' = (1, 2) + (-3, -2) = (-2, 0)$, el cual no formaría un paralelogramo convexo con el orden $ABCD$.

2.2. Área del Paralelogramo

Área mediante Producto Vectorial/Determinante

El área de un paralelogramo determinado por dos vectores no colineales $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en el plano real $\mathbb{R}^2$ es igual al valor absoluto del determinante de la matriz que forman dichos vectores como columnas (o filas):

$$\text{Área} = \left| \det \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \right| = |u_x v_y - u_y v_x|$$

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 2 – Apartado b) Calcula el área del paralelogramo.

Solución Paso a Paso

1. **Obtener los vectores que parten del vértice A:** Calculamos el vector $\vec{AB}$ y el vector $\vec{AD}$:

$$\vec{AB} = B - A = (-1, 5) - (1, 2) = (-2, 3)$$

$$\vec{AD} = D - A = (4, 4) - (1, 2) = (3, 2)$$

2. **Construir la matriz y calcular su determinante:** Planteamos el determinante con los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AD}$:

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -4 - 9 = -13$$

3. **Aplicar el valor absoluto para obtener el área:** Como el área debe ser un valor no negativo:

$$\text{Área} = |-13| = 13$$

Por tanto, el área del paralelogramo es de 13 unidades cuadradas.

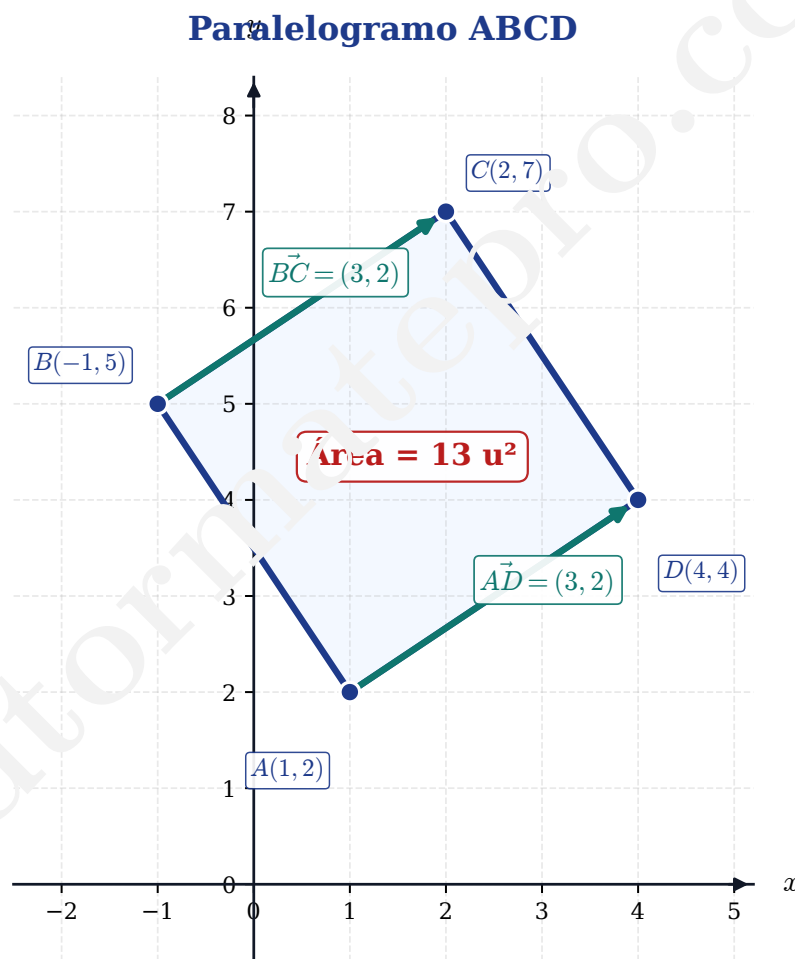


Figura 2: Gráfica del paralelogramo $ABCD$. Se muestran los puntos dados A, B, C , las coordenadas calculadas de $D(4, 4)$ y los vectores directores de los lados opuestos de la figura. El área delimitada por el paralelogramo es de 13 unidades cuadradas.

3. Ángulo que Forman Dos Rectas

El cálculo del ángulo entre dos rectas nos permite entender su inclinación relativa y resolver intersecciones geométricas.

Ángulo entre Rectas

El ángulo agudo $\theta \in [0, 90^\circ]$ que forman dos rectas r y s en el plano es el ángulo determinado por las direcciones de sus vectores directores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$. Se calcula mediante la fórmula:

$$\cos \theta = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{\|\vec{v}_r\| \|\vec{v}_s\|}$$

Donde:

- $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s$ es el producto escalar de los vectores directores.
- $\|\vec{v}\|$ representa el módulo o norma de cada vector.
- El valor absoluto en el numerador garantiza que se obtenga el ángulo agudo (el menor de los dos ángulos posibles).

3.1. Resolución Analítica del Ángulo

Sean las rectas:

$$r : (x, y) = (1, 0) + k(-1, -3), \quad k \in \mathbb{R}, \quad s : -3x + 7y + 1 = 0$$

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 3 Calcula el ángulo que forman las rectas r y s .

Solución Paso a Paso:

1. **Obtener el vector director $\vec{v}_r$ de la recta r :** La recta r viene dada en forma vectorial. El coeficiente de la variable libre k nos da el vector director directamente:

$$\vec{v}_r = (-1, -3)$$

2. **Obtener el vector director $\vec{v}_s$ de la recta s :** La recta s está en forma general. Su vector normal es $\vec{n}_s = (-3, 7)$. Un vector director $\vec{v}_s = (v_1, v_2)$ es perpendicular al vector normal $\vec{n}_s$, lo que implica que $\vec{v}_s \cdot \vec{n}_s = 0$. Podemos tomar:

$$\vec{v}_s = (7, 3) \quad (\text{ya que } 7(-3) + 3(7) = -21 + 21 = 0)$$

3. **Calcular el producto escalar de los vectores directores:**

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (-1)(7) + (-3)(3) = -7 - 9 = -16$$

Tomamos el valor absoluto:

$$|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s| = |-16| = 16$$

4. Calcular el módulo de los vectores directores:

$$\|\vec{v}_r\| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$\|\vec{v}_s\| = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$$

5. Sustituir los valores en la fórmula del coseno:

$$\cos \theta = \frac{16}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{58}} = \frac{16}{\sqrt{580}} = \frac{16}{2\sqrt{145}} = \frac{8}{\sqrt{145}} \approx 0.66436$$

6. Calcular el ángulo en grados:

$$\theta = \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{145}}\right) \approx 48.37^\circ$$

Inicia de coincidencia con las notas de clase: Si se redondea el coseno a 4 cifras decimales como en los apuntes de clase ($\cos \theta \approx 0.6643$), obtenemos $\theta \approx 48.39^\circ$. Como alternativa, Lara también menciona en sus clases que el ángulo suplementario es otra forma de expresar la inclinación entre las rectas:

$$\theta' = 180^\circ - 48.39^\circ = 131.61^\circ$$

Ángulo entre las rectas

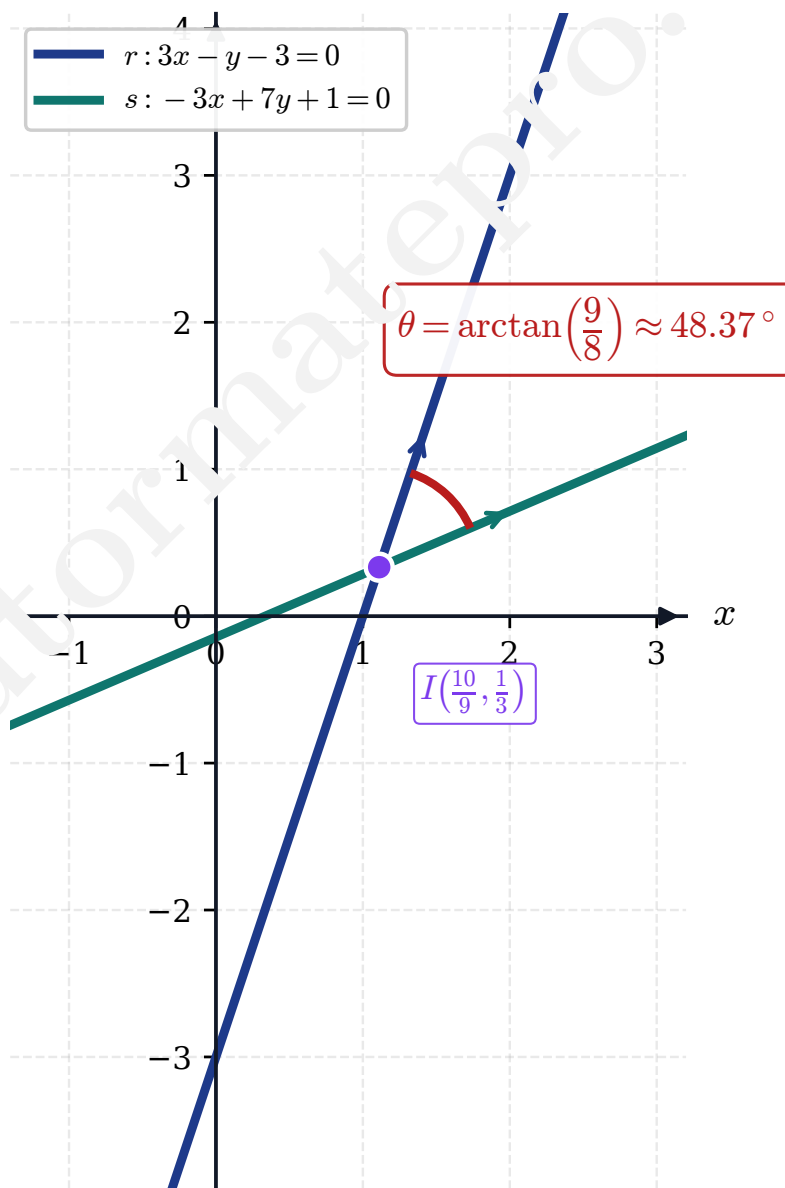


Figura 3: Representación gráfica de las rectas secantes r y s . Se muestra el punto de corte único $I(1.11, 0.33)$ y el ángulo agudo de corte entre ambas direcciones, el cual mide aproximadamente $\theta \approx 48.37^\circ$.

4. Distancia de un Punto a una Recta

Este ejercicio desarrolla el concepto de distancia mínima en el espacio bidimensional y la construcción de la ecuación general de una recta a partir de dos puntos.

Fórmula de la Distancia Punto-Recta

Dada una recta r en su forma general $Ax + By + C = 0$ y un punto exterior $P(x_0, y_0)$, la distancia más corta (perpendicular) de P a r se calcula como:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

4.1. Resolución del Problema

Queremos calcular la distancia entre el punto $P(-1, 5)$ y la recta r que pasa por:

$$A(0, 3) \quad \text{y} \quad B(-1, 6)$$

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 4 Calcula la distancia entre el punto $P(-1, 5)$ y la recta r .

Solución Paso a Paso:

1. **Hallar el vector director $\vec{AB}$ de la recta:**

$$\vec{AB} = B - A = (-1, 6) - (0, 3) = (-1, 3)$$

La pendiente de la recta es $m = \frac{3}{-1} = -3$.

2. **Escribir la ecuación de la recta r :** Utilizamos la forma punto-pendiente con el punto $A(0, 3)$:

$$y - 3 = m(x - x_A) \implies y - 3 = -3(x - 0) \implies y - 3 = -3x$$

Pasamos todos los términos al mismo miembro para obtener la forma general:

$$3x + y - 3 = 0$$

De aquí, identificamos los coeficientes: $A = 3$, $B = 1$, $C = -3$.

3. **Aplicar la fórmula de distancia con el punto $P(-1, 5)$:** Sustituimos $x_0 = -1$, $y_0 = 5$, y los coeficientes de r :

$$d(P, r) = \frac{|3(-1) + 1(5) - 3|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|-3 + 5 - 3|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{|-1|}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Racionalizando la expresión multiplicando por $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$:

$$d(P, r) = \frac{\sqrt{10}}{10} \approx 0.316 \text{ u}$$

Distancia de un punto a una recta

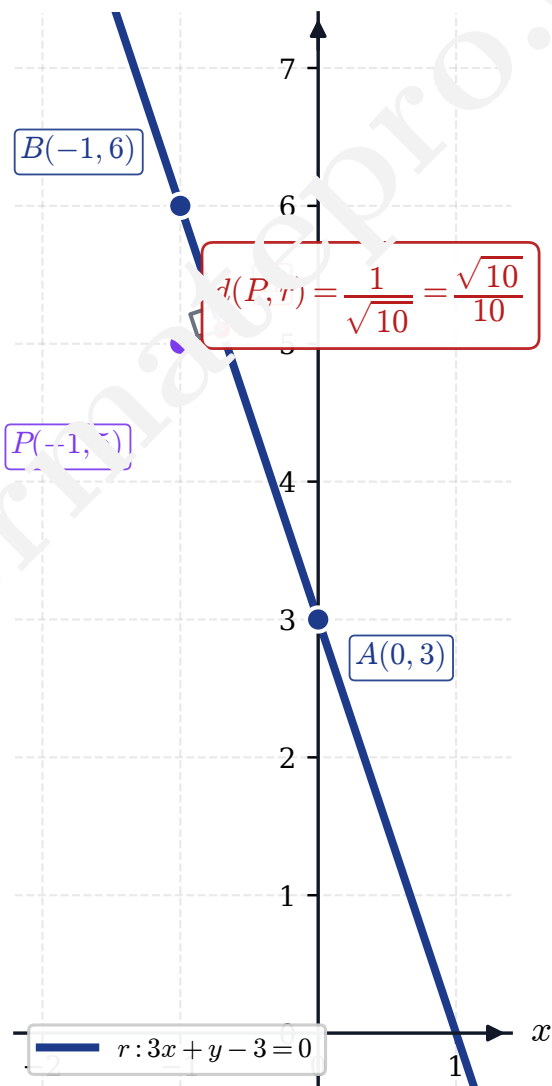


Figura 4: Gráfica de la recta r que pasa por los puntos $A(0, 3)$ y $B(-1, 6)$. Se resalta la posición del punto exterior $P(-1, 5)$ y el segmento perpendicular que une a P con r , con una longitud exacta de $d = \sqrt{10}/10 \approx 0.32$.

5. Rectas Perpendiculares y Cálculo de Áreas de Triángulos

La perpendicularidad es una relación fundamental que simplifica la búsqueda de distancias y alturas en figuras geométricas de tres lados.

Ortogonalidad y Rectas Perpendiculares

1. Si una recta r es perpendicular a un vector dado $\vec{u}$, entonces dicho vector es un **vector normal** de la recta: $\vec{n}_r = \vec{u}$. Por lo tanto, los coeficientes de su ecuación general son los componentes de $\vec{u}$.
2. Si dos rectas son perpendiculares, sus vectores normales son perpendiculares entre sí, lo que significa que el producto escalar es nulo: $\vec{n}_r \cdot \vec{n}_{r'} = 0$. Si $\vec{n}_r = (A, B)$, podemos tomar $\vec{n}_{r'} = (-B, A)$ o $(B, -A)$.

5.1. Construcción de Rectas e Intersección

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 5 – Apartados a, b, c)

a) Halla la recta r que pasa por $B(4, 2)$ y es perpendicular al vector $\vec{u} = (3, 5)$.

Solución: Dado que la recta r es perpendicular al vector $\vec{u}$, este vector actúa como el vector normal $\vec{n}_r = (3, 5)$. La ecuación general de la recta es:

$$3(x - 4) + 5(y - 2) = 0 \implies 3x - 12 + 5y - 10 = 0 \implies \boxed{r : 3x + 5y - 22 = 0}$$

b) Determina la recta r' que pasa por el punto $A(-4, 0)$ y es perpendicular a r .

Solución: Al ser r' perpendicular a r , su dirección normal debe ser perpendicular a $\vec{n}_r = (3, 5)$. Podemos tomar como vector normal de r' al vector $\vec{n}_{r'} = (5, -3)$. Planteamos su ecuación general a partir del punto $A(-4, 0)$:

$$5(x - (-4)) - 3(y - 0) = 0 \implies 5(x + 4) - 3y = 0 \implies \boxed{r' : 5x - 3y + 20 = 0}$$

c) Halla el punto C : punto de corte entre las rectas r y r' .

Solución: Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales por reducción:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 22 & (\times 3) \\ 5x - 3y = -20 & (\times 5) \end{cases} \implies \begin{cases} 9x + 15y = 66 \\ 25x - 15y = -100 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$34x = -34 \implies x = -1$$

Sustituimos $x = -1$ en la primera ecuación para calcular y .

$$3(-1) + 5y = 22 \implies -3 + 5y = 22 \implies 5y = 25 \implies y = 5$$

Por tanto, el punto de intersección es $C(-1, 5)$.

5.2. Cálculo del Área del Triángulo ABC (EXTRA 1)

Contamos con los puntos $A(-4, 0)$, $B(4, 2)$ y $C(-1, 5)$.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 5 – Apartado d) [EXTRA 1] Calcular el área del triángulo ABC .
Solución Paso a Paso:

Método paso a paso

Método A: Utilizando Determinantes Vectoriales (Vía Rápida de Notas de Clase)

1. **Definir dos vectores con origen común:** Tomamos los vectores que parten del vértice A hacia C y de B hacia C :

$$\vec{AC} = C - A = (-1, 5) - (-4, 0) = (3, 5)$$

$$\vec{BC} = C - B = (-1, 5) - (4, 2) = (-5, 3)$$

2. **Aplicar la fórmula del área mediante determinantes en $\mathbb{R}^2$:**
El área de un triángulo determinado por dos vectores es la mitad de la de su paralelogramo asociado:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |3(3) - 5(-5)| = \frac{1}{2} |9 + 25| = \frac{34}{2} = \boxed{17}$$

Método paso a paso**Método B: Usando la Fórmula de Base por Altura (Vía Clásica de Notas de Clase)**

1. Calcular la Base como la longitud del segmento AB :

$$\vec{AB} = B - A = (4, 2) - (-4, 0) = (8, 2)$$

$$\text{Base } (b) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

2. Calcular la Altura como la distancia del punto C a la recta AB : El vector normal a la recta AB es perpendicular a su vector director $\vec{d} = (8, 2)$, por lo que elegimos $\vec{n} = (-2, 8)$. La ecuación de la recta AB que pasa por $A(-4, 0)$ es:

$$-2(x + 4) + 8(y - 0) = 0 \implies -2x + 8y - 8 = 0$$

Calculamos la altura (h) mediante la distancia de $C(-1, 5)$ a esta recta:

$$h = d(C, \text{recta } AB) = \frac{|-2(-1) + 8(5) - 8|}{\sqrt{(-2)^2 + 8^2}} = \frac{|2 + 40 - 8|}{\sqrt{68}} = \frac{34}{\sqrt{68}}$$

Dado que $\sqrt{68} = 2\sqrt{17}$:

$$h = \frac{34}{2\sqrt{17}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$$

3. Calcular el área:

$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2\sqrt{17} \cdot \sqrt{17}}{2} = \frac{2 \cdot 17}{2} = \boxed{17}$$

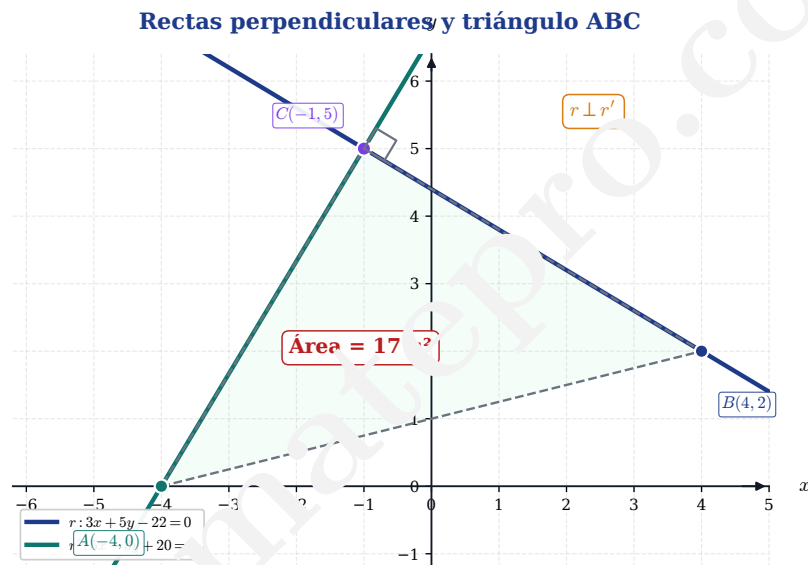


Figura 5: Gráfica del triángulo ABC formado por las rectas perpendiculares r y r' . El ángulo recto en $C(-1, 5)$ muestra que el triángulo es rectángulo, y su área encerrada es de 17 unidades cuadradas.

6. Determinación de Parámetros en Fórmulas de Distancia

Las ecuaciones de distancia punto-recta a menudo implican la existencia de dos soluciones geométricas debido al uso de valores absolutos.

Geometría de la Distancia Constante

Para una recta r fija en el plano, el conjunto de todos los puntos P que se encuentran a una distancia constante d de ella está compuesto por dos rectas paralelas a r , situadas a ambos lados de la misma.

Al buscar un punto sobre una trayectoria específica (como la recta vertical $x = 2$) que esté a distancia d , la ecuación resultante contiene un término de valor absoluto $|x|$, lo que se descompone de forma natural en dos casos matemáticos diferenciados.

6.1. Resolución del Problema con Parámetro

Queremos determinar el valor de a (designado en ocasiones como q en las notas de clase) para que la distancia de la recta:

$$r : 3x + 4y - 12 = 0$$

al punto

$$P(2, a)$$

sea de exactamente 2 unidades.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 6 [EXTRA 2] Determina a para que la distancia sea de 2 unidades.
Solución Paso a Paso:

1. **Planteamiento de la ecuación de distancia:** Aplicamos la fórmula clásica para $P(2, a)$ y la recta r ($A = 3$, $B = 4$, $C = -12$):

$$d(P, r) = \frac{|3(2) + 4a - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

Simplificamos el radicando del denominador y la expresión del numerador:

$$\frac{|6 + 4a - 12|}{\sqrt{25}} = 2 \implies \frac{|4a - 6|}{5} = 2$$

Multiplicamos por 5 a ambos lados de la igualdad para despejar el valor absoluto:

$$|4a - 6| = 10$$

2. **Descomposición en los dos casos posibles:**

Método paso a paso**Caso 1: El argumento del valor absoluto es positivo**

$$4a - 6 = 10 \implies 4a = 16 \implies \boxed{a = 4}$$

Esto da el primer punto factible: $P_1(4, 4)$.

Método paso a paso**Caso 2: El argumento del valor absoluto es negativo**

$$-(4a - 6) = 10 \implies -4a + 6 = 10 \implies -4a = 4 \implies \boxed{a = -1}$$

Esto da el segundo punto factible: $P_2(2, -1)$.

3. **Conclusión de resultados:** Los valores válidos para el parámetro son $a \in \{-1, 4\}$, lo que da lugar a dos soluciones en el plano: los puntos $P(4, 4)$ y $P(2, -1)$.

¡Nunca te olvides del signo negativo al desglosar un valor absoluto! Es un error recurrente concluir únicamente la solución $a = 4$ y omitir la segunda rama. Recuerda que la distancia es una magnitud escalar que mide separación, no el lado del que se encuentra el punto.

Puntos $P(2,a)$ a distancia 2 de la recta r

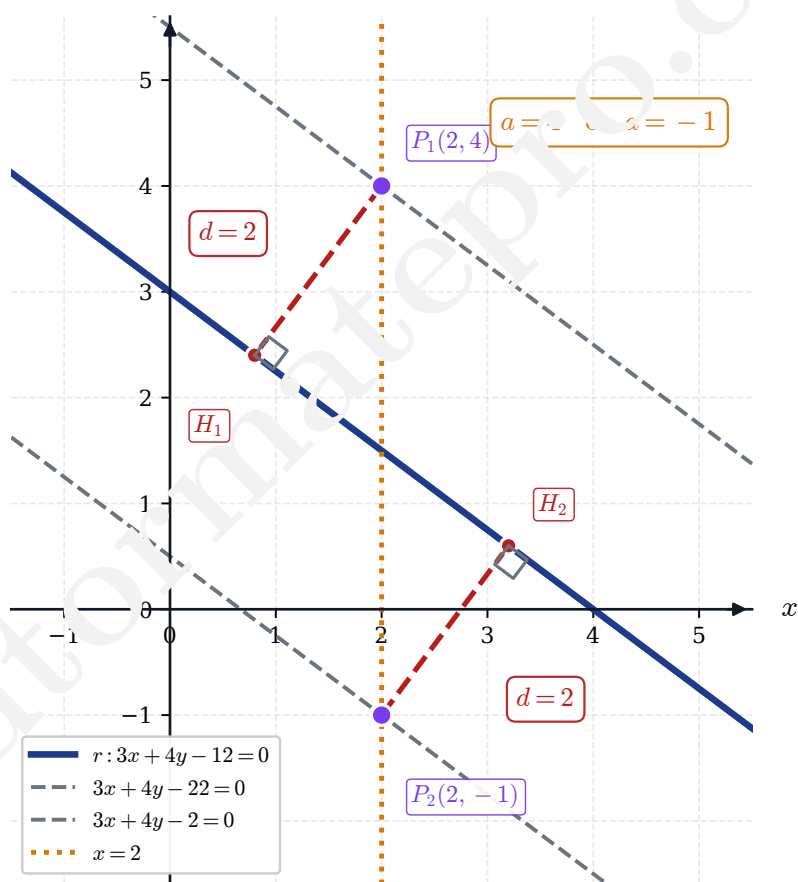


Figura 6: Representación gráfica de las dos soluciones al problema. La recta vertical punteada representa el lugar geométrico de todos los puntos de la forma $P(2, y)$. Los puntos $P(2, 4)$ y $P(2, -1)$ son los dos únicos puntos de esa recta que guardan una distancia exacta de 2 unidades con respecto a r .