

Curso Completo de Razonamiento Numérico y Análisis de Datos

Sistemas de transporte, retenciones de IRPF, fiabilidad de data centers, análisis de calidad de agua, índices encadenados y suficiencia de datos

Preparado especialmente para:

Preparación de Oposiciones

Idea visual clave / Intuición

Idea central de esta guía:

Las matemáticas conectan el análisis abstracto con la intuición física y de datos. A través de este documento, resolveremos paso a paso cada uno de los ejercicios y prácticas de las sesiones de clase. Combinaremos el análisis de porcentajes, las tasas de variación, la proporcionalidad directa e inversa, y los índices encadenados con interpretaciones y resúmenes estructurados para lograr un dominio intuitivo, riguroso y profesional de la materia.

Índice

1. Sistemas de Transporte y Tarifas (22 de octubre de 2025)	3
2. Sueldos y Retenciones de IRPF (5 de noviembre de 2025)	8
3. Crecimiento Universitario y Desempleo (3 de noviembre de 2025)	11
4. Cadena Hotelera y Macrozonas de Continencia (11 de noviembre de 2025)	15
5. Transporte Público en Montaña - Extensión (21 de noviembre de 2025)	19
6. Regiones de Luminaria y Noravia (23 de noviembre de 2025)	21
7. Reclamaciones de Autobuses (26 de noviembre de 2025)	25
8. Fiabilidad de Data Centers (5 de diciembre de 2025)	28
9. Calidad del Agua y Plantas de Tratamiento (14 de diciembre de 2025)	31
10. Análisis de Gráficas y Datos (Diciembre 2025 - Enero 2026)	34
10.1. Flujo de Solicitudes y Acumulación de Pendientes	34
10.2. Mezcla de Generación y Emisiones	36
10.3. Producción, Tasa de Defectos y Defectos Absolutos	40

10.4. Curva Acumulada y Percentiles de Tiempo	43
10.5. Índices Encadenados y Descomposición Precio-Volumen	45
11.Práctica RVNE107 (28 de enero de 2026)	48
12.Práctica RVNE108 (2 de febrero de 2026)	52
13.Práctica RVNE5 - Ventas de Móviles (5 de febrero de 2026)	53
14.Turistas e Importaciones - Ejercicios Varios (27 de febrero de 2026)	55
15.Repaso de Viviendas e Incidencias (14 de marzo de 2026)	59
16.Repaso de Alojamiento e Inflación (21 de marzo de 2026)	62
17.Actividad de Calificaciones y Sectores (3 de abril de 2026)	64
18.Riesgo de Pobreza y Exclusión (15 de abril de 2026)	67
19.Práctica RVNE 110 (3 de mayo de 2026)	69
20.Empresas del Sector TIC (16 de mayo de 2026)	71
21.Cobertura de la Demanda Eléctrica (24 de mayo de 2026)	76

1. Sistemas de Transporte y Tarifas (22 de octubre de 2025)

En esta sesión se analiza el impacto de las variaciones de tarifas y la aplicación de descuentos por grupos de población en la recaudación del sistema de transporte de Monteluna.

Tasas de Variación y Ponderaciones

La recaudación total se obtiene multiplicando el número de pasajeros por la tarifa correspondiente. Cuando existen tarifas diferenciadas por sector (descuentos), la tarifa media ponderada se calcula como:

$$\bar{T} = \sum p_i \cdot T_i$$

donde p_i representa la proporción de usuarios en el tramo i y T_i es la tarifa reducida para dicho tramo. La variación porcentual entre dos periodos se define como:

$$\Delta\% = \frac{\text{Recaudación}_{\text{final}} - \text{Recaudación}_{\text{inicial}}}{\text{Recaudación}_{\text{inicial}}} \cdot 100\%$$

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 1 La Autoridad de Transporte de la ciudad de Monteluna publicó los siguientes datos de uso del transporte público:

Tabla 1: Uso y tarifas base en la red de Monteluna (Sesión 1)

Modo	Pasajeros 2024 (millones)	Tarifa base 2024 (€)	Pasajeros 2025 (millones)	Tarifa base 2025 (€)
Bus	210	1,20	205	1,25
Metro	160	1,60	180	1,70
Tranvía	90	1,05	92	1,10

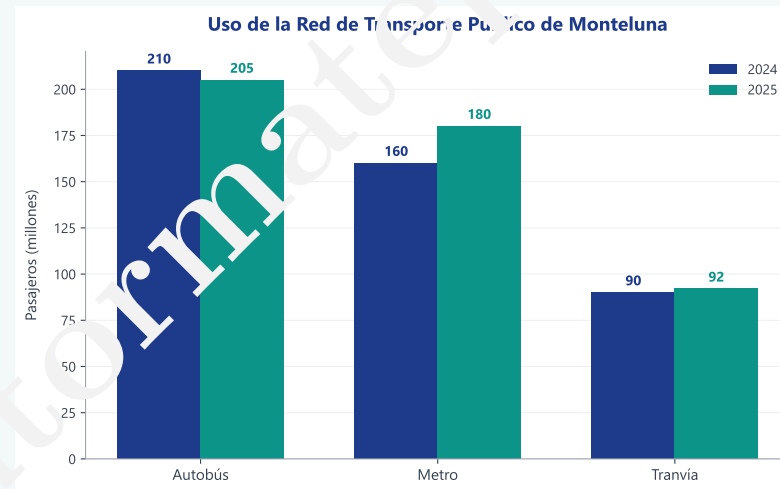


Figura 1: Uso de la red de transporte público en Monteluna (2024 vs 2025).

En 2025, en el metro se aplicaron descuentos sobre la tarifa base de 2025:

- El 25% de los viajes fueron con tarjeta joven, que paga un 50% menos.
- El 15% de los viajes fueron con tarjeta senior, que paga un 30% menos.
- El resto de los viajes pagó la tarifa completa.

¿En qué porcentaje aumentó o disminuyó la recaudación total de metro de 2024 hasta 2025?

Solución Paso a Paso:

1. Recaudación de metro en 2024:

$$R_{\text{metro, 2024}} = 160 \text{ M} \cdot 1.60 \text{ €} = 256.00 \text{ M€}$$

2. Cálculo de la tarifa media ponderada de metro en 2025:

- **Tarifa Joven:** $1.70 \cdot (1 - 0.50) = 0.85 \text{ €}$ (25% de viajes)

- **Tarifa Senior:** $1.70 \cdot (1 - 0.30) = 1.19$ € (15% de viajes)
- **Tarifa Completa:** 1.70 € (60% de viajes)

$$\bar{T}_{\text{metro}, 2025} = 0.25 \cdot 0.85 + 0.15 \cdot 1.19 + 0.60 \cdot 1.70 = 0.2125 + 0.1785 + 1.0200 = 1.411 \text{ €}$$

3. Recaudación de metro en 2025:

$$R_{\text{metro}, 2025} = 180 \text{ M} \cdot 1.411 \text{ €} = 253.98 \text{ M€}$$

4. Variación porcentual de la recaudación:

$$\Delta \% = \frac{253.98 - 256.00}{256.00} \cdot 100\% = \frac{-2.02}{256.00} \cdot 100\% \approx -0.79\%$$

La recaudación del metro disminuyó un **0.79%**.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 2 En 2025, el metro aplicó descuentos distintos por semestre sobre la tarifa base de 2025 (1.70 €):

- **Primer semestre** (45% de viajes anuales):
 - 20% con tarjeta joven (pagan 50% de la tarifa)
 - 10% con tarjeta senior (pagan 70% de la tarifa)
 - 70% restante pagan tarifa completa.
- **Segundo semestre** (55% de viajes anuales):
 - 30% con tarjeta joven (pagan 50% de la tarifa)
 - 18% con tarjeta senior (pagan 70% de la tarifa)
 - 52% restante pagan tarifa completa.

El autobús y el tranvía no tienen descuentos. ¿Cuál fue la variación de la recaudación del sistema completo entre 2024 y 2025?

Solución Paso a Paso:

1. Recaudación total del sistema en 2024:

- Bus: $210 \text{ M} \cdot 1.20 \text{ €} = 252 \text{ M€}$
- Metro: $160 \text{ M} \cdot 1.60 \text{ €} = 256 \text{ M€}$
- Tranvía: $90 \text{ M} \cdot 1.05 \text{ €} = 94.5 \text{ M€}$

$$R_{\text{total}, 2024} = 252 + 256 + 94.5 = 602.5 \text{ M€}$$

2. Recaudación del metro por semestres en 2025:

- **Primer semestre** ($180 \text{ M} \cdot 0.45 = 81 \text{ M}$ viajes):

$$\begin{aligned} R_{\text{metro}, \text{sem1}} &= 81 \cdot (0.20 \cdot 0.85 + 0.10 \cdot 1.19 + 0.70 \cdot 1.70) \\ &= 81 \cdot (0.17 + 0.119 + 1.19) = 81 \cdot 1.479 = 119.799 \text{ M€} \end{aligned}$$

- Segundo semestre ($180 \text{ M} \cdot 0.55 = 99 \text{ M}$ viajes):

$$\begin{aligned} R_{\text{metro, sem2}} &= 99 \cdot (0.30 \cdot 0.85 + 0.18 \cdot 1.19 + 0.52 \cdot 1.70) \\ &= 99 \cdot (0.255 + 0.2142 + 0.884) = 99 \cdot 1.3532 = 133.9668 \text{ M€} \end{aligned}$$

- Recaudación metro 2025: $R_{\text{metro, 2025}} = 119.799 + 133.9668 = 253.7658 \text{ M€}$.

3. Recaudación del autobús y tranvía en 2025:

- Bus: $205 \text{ M} \cdot 1.25 \text{ €} = 256.25 \text{ M€}$
- Tranvía: $92 \text{ M} \cdot 1.10 \text{ €} = 101.20 \text{ M€}$

4. Recaudación total en 2025 y comparación:

$$R_{\text{total, 2025}} = 256.25 + 253.7658 + 101.20 = 611.2158 \text{ M€}$$

$$\Delta\% = \frac{611.2158 - 602.50}{602.50} \cdot 100\% = \frac{8.7158}{602.50} \cdot 100\% \approx 1.45\%$$

La recaudación total del sistema de transporte aumentó un **1.45%**.

2. Sueldos y Retenciones de IRPF (5 de noviembre de 2025)

En esta sesión se abordan las relaciones entre el sueldo bruto y el sueldo neto aplicando deducciones porcentuales y retenciones de IRPF y seguridad social.

Sueldo Bruto y Neto

Dado un sueldo bruto S_B , el sueldo neto S_N tras aplicar una tasa total de retenciones T_{ret} se calcula como:

$$S_N = S_B \cdot (1 - T_{\text{ret}}) \implies S_B = \frac{S_N}{1 - T_{\text{ret}}}$$

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio Único Se dispone de la siguiente información fiscal y de salarios netos para dos empleadas, Lucía y Nuria:

- Retenciones comunes (seguridad social, etc.): 4.7%
- Retención por desempleo: 1.7%
- Retención de IRPF: Lucía 12%, Nuria 2%.
- Sueldo neto: Lucía 1468.80 €, Nuria 1236.60 €.

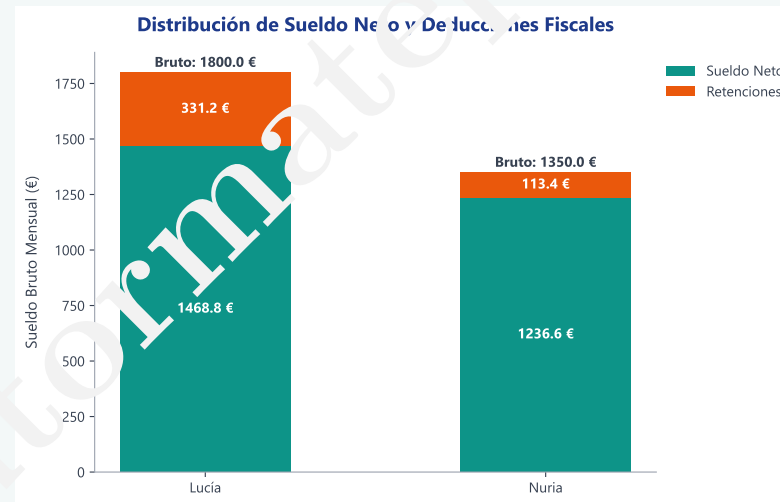


Figura 2: Distribución de sueldos brutos, netos y retenciones para Lucía y Nuria.

Calcular la proporción entre los sueldos brutos de Lucía y Nuria.

Solución Paso a Paso:

1. Cálculo de la tasa total de retenciones para cada una:

- Lucía: $T_{\text{ret}, L} = 4.7\% + 1.7\% + 12\% = 18.4\% = 0.184$
- Nuria: $T_{\text{ret}, N} = 4.7\% + 1.7\% + 2\% = 8.4\% = 0.084$

2. Cálculo del sueldo bruto de cada una:

- Lucía:

$$S_{B,L} = \frac{1468.80}{1 - 0.184} = \frac{1468.80}{0.816} = 1800.00 \text{ €}$$

- Nuria:

$$S_{B,N} = \frac{1236.60}{1 - 0.084} = \frac{1236.60}{0.916} = 1350.00 \text{ €}$$

3. Cálculo de la proporción entre los sueldos brutos:

$$\text{Proporción} = \frac{S_{B,N}}{S_{B,L}} = \frac{1350}{1800} = \frac{135}{180} = \frac{3}{4} = 0.75$$

La proporción es exactamente de **3:4** (es decir, el sueldo bruto de Nuria es las tres cuartas partes del sueldo de Lucía).

3. Crecimiento Universitario y Desempleo (8 de noviembre de 2025)

Esta sesión recopila la lectura de tablas con datos agregados por país sobre demografía, educación superior, desempleo y estructura económica (PIB).

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 1 A partir de las siguientes tablas, responder a las preguntas planteadas.

Tabla 2: Tabla 1: Población en millones y universitarios en millones

País	2018 pob.	2022 pob.	2018 Univ.	2022 Univ.	Crecimiento relativo
A	9.8	10.2	0.82	0.90	+9%
B	6.1	6.4	0.44	0.40	-9%
C	33.5	34.6	2.10	2.46	+17%
D	12.0	12.5	0.70	0.84	+20%

Tabla 3: Tabla 2: Desempleo 2022 (parados por cada 1000 habitantes) y población 2022

País	Parados / 1000	Población 2022 (millones)	Parados en total
A	110	10.2	1 122 000
B	95	6.4	608 000
C	75	34.6	2 595 000
D	135	12.5	1 687 500

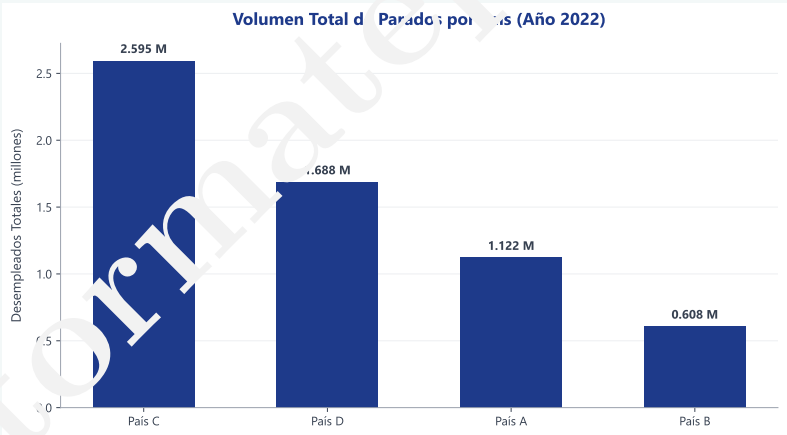


Figura 3: Volumen total de desempleados por país en 2022.

Tabla 4: Tabla 3: Estructura del PIB por sectores en el año 2022

País	Servicios	Industria	Agricultura	PIB País C / PIB Regional
A	48%	42%	10%	—
B	60%	35%	5%	—
C	44%	47%	9%	30%
D	52%	38%	10%	—

Tabla 5: Tabla 4: Servicios públicos por cada millón de habitantes (2022)

País	Guarderías	Hospitales	Parques bomberos	Resid. ancianos	Pob. (millones)	Total Hospitales
A	300	5	4	110	10.2	51
B	360	4	6	95	6.4	25.6
C	520	8	9	140	34.6	276.8
D	500	7	12	125	12.5	87.5

Preguntas y Resoluciones:

1. ¿En qué país aumentó más, en porcentaje, el número de universitarios entre 2018 y 2022?

- País A: $\frac{0.90-0.82}{0.82} \approx 9.76\%$ (redondeado en tabla a 9%)
- País B: $\frac{0.40-0.44}{0.44} = -9.09\%$ (redondeado en tabla a -9%)
- País C: $\frac{2.46-2.10}{2.10} \approx 17.14\%$ (redondeado en tabla a 17%)
- País D: $\frac{0.84-0.70}{0.70} = 20.00\%$

El mayor aumento corresponde al **País D** con un **20%** (un aumento absoluto de 140 000 universitarios).

2. Convertir las tasas de desempleo “por cada 1000” a totales y estimar parados en el País B y los otros países.

- **País B:** 95 parados/1000 hab · 6.4 millones hab = 95 · 6400 = 608 000 parados.
- **País A:** 110 parados/1000 hab · 10.2 millones hab = 110 · 10200 = 1 122 000 parados.
- **País C:** 75 parados/1000 hab · 34.6 millones hab = 75 · 34600 = 2 595 000 parados.
- **País D:** 135 parados/1000 hab · 12.5 millones hab = 135 · 12500 = 1 687 500 parados.

La suma de los parados de A y D es 1 122 000 + 1 687 500 = 2 809 500. Comparado con C (2 595 000 parados), la supera en 214 500 parados (aproximadamente **0.21 millones**).

3. Estructura del PIB: Porcentaje medio de servicios y participación sectorial de C:

- **Porcentaje medio de servicios en la región:**

$$\text{Media} = \frac{48\% + 30\% + 44\% + 52\%}{4} = 51\%$$

- **PIB regional de la industria de C:** Como el PIB de C representa el 30% del PIB regional y su industria representa el 47% de su propio PIB:

$$\% \text{ PIB Regional (Industria C)} = 0.47 \cdot 0.30 = 0.141 = 14.1\%$$

4. PIB per cápita y Universitarios en País D: En D, la población es 12.5 millones, los universitarios son 0.84 millones y el sector servicios representa el 52% del PIB. Si el PIB total de D se indexa como 100 unidades y el PIB per cápita es proporcional al PIB total:

- **Reparto de PIB por habitante (promedio país):**

$$\frac{100 \text{ unidades}}{12.5 \text{ millones habs}} = 8.00 \text{ unidades/millón habs}$$

- **Reparto de PIB atribuible a servicios por universitario:**

$$\frac{52 \text{ unidades de servicios}}{0.84 \text{ millones univ.}} \approx 61.90 \text{ unidades/millón univ.}$$

- **Relación de reparto:**

$$\frac{61.90}{8.00} \approx 7.737$$

A cada universitario le corresponde un PIB de servicios que es **7.74 veces** el PIB per cápita promedio del país.

4. Cadena Hotelera y Macrozonas de Continencia (11 de noviembre de 2025)

Esta sesión aborda la relación de estimaciones de oferta hotelera y la consolidación de poblaciones ponderadas por superficies y densidades geográficas.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 1 (Oferta hotelera) Una cadena hotelera gestiona cuatro regiones. El porcentaje de ocupación en Semana Santa fue:

Tabla 6: Ocupación porcentual por regiones (2021-2024)

Región	2021	2022	2023	2024
Región A	88%	84%	86%	80%
Región B	12%	11%	12%	13%
Región C	60%	72%	83%	89%
Región D	52%	56%	55%	60%

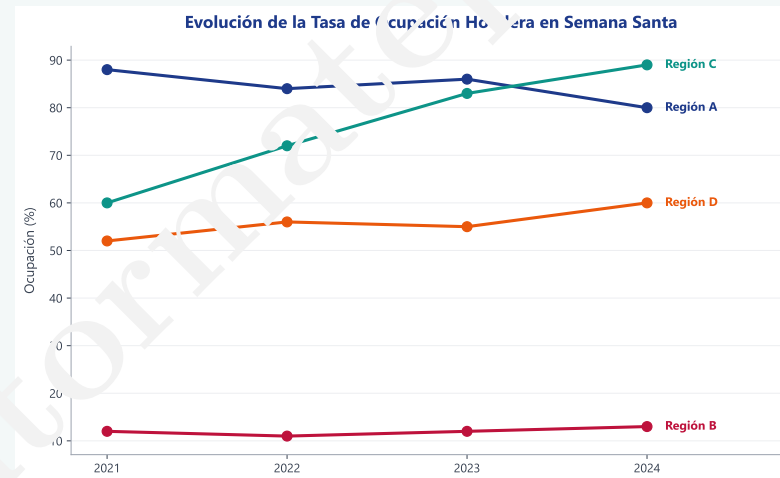


Figura 4: Evolución de la ocupación hotelera en Semana Santa (2021-2024).

En 2021, la región A tuvo 1584 habitaciones ocupadas y sus plazas disponibles eran la tercera parte de las plazas disponibles de la región D en 2024. Entre 2021 y 2024, la oferta de plazas disponibles de D creció un 20%. Estimar las plazas ocupadas en la región D en 2021.

Solución Paso a Paso:

1. **Plazas disponibles en A en 2021:** Sabemos que las habitaciones ocupadas en A en 2021 son 1584, con una ocupación del 88%.

$$\text{Disponibles}_{A,2021} = \frac{1584}{0.88} = 1800 \text{ habitaciones/plazas}$$

2. **Plazas disponibles en D en 2024:** Dado que las plazas disponibles de A en 2021 son la tercera parte de las de D en 2024:

$$\text{Disponibles}_{D,2024} = 3 \cdot 1800 = 5400 \text{ plazas}$$

3. **Plazas disponibles en D en 2021:** Como la oferta de plazas disponibles de D creció un 20% entre 2021 y 2024:

$$\text{Disponibles}_{D,2021} \cdot 1.20 = \text{Disponibles}_{D,2024} \implies \text{Disponibles}_{D,2021} = \frac{5400}{1.20} = 4500 \text{ plazas}$$

4. **Plazas ocupadas en D en 2021:** La tasa de ocupación de D en 2021 fue del 52%.

$$\text{Ocupadas}_{D,2021} = 4500 \cdot 0.52 = 2340 \text{ plazas}$$

En 2021, la región D tuvo **2340 plazas ocupadas**

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 2 (Continentia) Continentia tiene cinco macrozonas con superficies y densidades definidas:

Tabla 7: Superficie y densidad de macrozonas en Continentia

Macro-zona	Densidad (hab./km ²)	Superficie (millones de km ²)	Población calculada (millones)
Alfa	35	31.0	$35 \cdot 31 = 1085$
Beta	24	43.0	$24 \cdot 43 = 1032$
Gama	72	10.5	$72 \cdot 10.5 = 756$
Delta	91	45.0	$91 \cdot 45 = 4095$
Épsilon	3.6	9.0	$3.6 \cdot 9 = 32.4$
Total	–	138.5	7000.4

1. **Aumento de superficie habitable en Épsilon:** Un territorio glaciario de 14 millones de km² se integra a Épsilon sin variar su población (32.4 millones de habitantes). Calcular la nueva densidad de Épsilon.

$$\text{Superficie}_{\text{nueva}} = 9.0 + 14.0 = 23.0 \text{ millones km}^2$$

$$\text{Densidad}_{\text{nueva}} = \frac{32.4}{23.0} \approx 1.41 \text{ hab/km}^2$$

2. **Fusión de Gama y Delta:** Si Gama y Delta se fusionan, ¿cuál es la densidad de la unión administrativa?

- Población total: $756 + 4095 = 4851$ millones de habitantes.
- Superficie total: $10.5 + 45.0 = 55.5$ millones de km².

$$\text{Densidad}_{\text{fusión}} = \frac{4851}{55.5} \approx 87.41 \text{ hab/km}^2$$

5. Transporte Público en Monteluna - Extensión (21 de noviembre de 2025)

Esta sesión repasa el sistema de transporte de Monteluna con nuevos datos y extiende los cálculos a proyecciones de tarifas base futuras.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 1 A partir de las nuevas tarifas base del sistema:

Tabla 8 Uso y tarifas base en la red de Monteluna (Sesión 5)

Modo	Pasajeros 2024 (millones)	Tarifa base 2024 (€)	Pasajeros 2025 (millones)	Tarifa base 2025 (€)
Bus	210	1,20	205	1,25
Metro	120	1,50	150	1,60
Tranvía	35	1,70	40	1,70

1. **Variación de recaudación del metro de 2024 a 2025** con descuentos Joven (25% viajan con 50% dto.) y Senior (15% viajan con 30% dto.):

- Recaudación 2024: $120 \text{ M} \cdot 1.50 \text{ €} = 180 \text{ M€}$
- Recaudación 2025:

$$\begin{aligned}
 R_{\text{metro}, 2025} &= 150 \cdot (0.25 \cdot 0.80 + 0.15 \cdot 1.12 + 0.60 \cdot 1.60) \\
 &= 150 \cdot (0.20 + 0.168 + 0.96) = 150 \cdot 1.328 = 199.20 \text{ M€}
 \end{aligned}$$

- Variación: $\Delta\% = \frac{199.20 - 180}{180} \cdot 100\% = 10.67\%$

2. **Variación de la recaudación total del sistema** con descuentos semestrales en metro (Primer semestre 45% viajes, Joven 20% al 50% dto., Senior 10% al 30% dto.; Segundo semestre 55% viajes, Joven 30% al 50% dto., Senior 18% al 30% dto.):

- **Recaudación total 2024:** $210 \cdot 1.20 + 120 \cdot 1.50 + 35 \cdot 1.70 = 252 + 180 + 59.5 = 491.5 \text{ M€}.$

- **Recaudación metro 2025 (primer semestre):**

$$\begin{aligned} R_{\text{metro, sem1}} &= 150 \cdot 0.45 \cdot (0.20 \cdot 0.80 + 0.10 \cdot 1.12 + 0.70 \cdot 1.60) \\ &= 67.5 \cdot (0.16 + 0.112 + 1.12) = 67.5 \cdot 1.392 = 93.96 \text{ M€} \end{aligned}$$

- **Recaudación metro 2025 (segundo semestre):**

$$\begin{aligned} R_{\text{metro, sem2}} &= 150 \cdot 0.55 \cdot (0.30 \cdot 0.80 + 0.18 \cdot 1.12 + 0.52 \cdot 1.60) \\ &= 82.5 \cdot (0.24 + 0.2016 + 0.832) = 82.5 \cdot 1.2736 = 105.072 \text{ M€} \end{aligned}$$

- **Recaudación total metro 2025:** $93.96 + 105.072 = 199.032 \text{ M€}$.
- **Recaudación total sistema 2025:** $205 \cdot 1.25 + 199.032 + 40 \cdot 1.70 = 256.25 + 199.032 + 68.00 = 523.282 \text{ M€}$.
- **Variación total:** $\Delta\% = \frac{523.282 - 491.50}{491.50} \cdot 100\% \approx 6.47\%$

3. **Tarifa base del metro en 2026** para que, manteniendo la estructura de viajes (150M) y descuentos de 2025, la recaudación del metro sea igual a la del 2024 (180 M€):

$$R_{\text{metro, 2026}} = T_{\text{base, 2026}} \cdot [0.45 \cdot (0.20 \cdot 0.5 + 0.10 \cdot 0.7 + 0.70 \cdot 1) + 0.55 \cdot (0.30 \cdot 0.5 + 0.18 \cdot 0.7 + 0.52 \cdot 1)] \cdot 150 \text{ M}$$

$$R_{\text{metro, 2026}} = T_{\text{base, 2026}} \cdot [0.45 \cdot (0.1 + 0.07 + 0.7) + 0.55 \cdot (0.15 + 0.126 + 0.52)] \cdot 150 \text{ M}$$

$$180 = T_{\text{base, 2026}} \cdot [0.45 \cdot (0.87) + 0.55 \cdot (0.796)] \cdot 150 \implies 180 = T_{\text{base, 2026}} \cdot [0.3915 + 0.4378] \cdot 150$$

$$180 = T_{\text{base, 2026}} \cdot 0.8293 \cdot 150 \implies 180 = T_{\text{base, 2026}} \cdot 124.395 \implies T_{\text{base, 2026}} = \frac{180}{124.395} \approx 1.447 \text{ €}$$

La tarifa base requerida es de **1.45 €**.

6. Regiones de Luminaria y Noravia (23 de noviembre de 2025)

En esta sesión se estudian las densidades de población, los crecimientos demográficos acumulados y la contribución de la población urbana al PIB.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 1 (Luminaria) Dados los datos de 2023 en la tabla:

Tabla 9: Regiones de Luminaria (año 2023)

Región	Superficie (km ²)	Población 2023 (millones)	Crec. 2024 (%)	PIB pc 2023 (€)	Desempleo 2023 (%)	% Urbano (2023-2024)
Norte	18 500	3.2	2.5%	28 500	12.0%	68%
Centro	27 000	5.0	1.2%	22 200	9.5%	74%
Sur	64 000	7.8	3.0%	17 100	18.0%	59%

En 2024, el PIB per cápita de cada región aumentó un 5% respecto al 2023. El porcentaje urbano se mantiene igual. ¿Qué porcentaje del PIB nacional total fue generado por la población urbana en 2024?

Solución Paso a Paso:

1. Población y PIB per cápita en 2024:

- **Norte:** $Pob_{2024} = 3.2 \cdot 1.025 = 3.28$ millones; $PIB_{pc_{2024}} = 28500 \cdot 1.05 = 29925$ €
- **Centro:** $Pob_{2024} = 5.0 \cdot 1.012 = 5.06$ millones; $PIB_{pc_{2024}} = 22200 \cdot 1.05 = 23310$ €
- **Sur:** $Pob_{2024} = 7.8 \cdot 1.030 = 8.034$ millones; $PIB_{pc_{2024}} = 17100 \cdot 1.05 = 17955$ €

2. PIB total por región en 2024:

- Norte: $PIB_{Norte} = 3.28 \text{ M} \cdot 29925 \text{ €} = 98\,154 \text{ M€}$

- Centro: $\text{PIB}_{\text{Centro}} = 5.06 \text{ M} \cdot 23310 \text{ €} = 117\,948.6 \text{ M€}$
- Sur: $\text{PIB}_{\text{Sur}} = 8.034 \text{ M} \cdot 17955 \text{ €} = 144\,250.47 \text{ M€}$
- **PIB Nacional:** $98\,154 + 117\,948.6 + 144\,250.47 = 360\,353.07 \text{ M€}$

3. PIB generado por la población urbana por región:

- Norte: $98\,154 \text{ M€} \cdot 68\% = 66\,744.72 \text{ M€}$
- Centro: $117\,948.6 \text{ M€} \cdot 74\% = 87\,281.964 \text{ M€}$
- Sur: $144\,250.47 \text{ M€} \cdot 59\% = 85\,107.777 \text{ M€}$
- **PIB Urbano Nacional:** $66\,744.72 + 87\,281.964 + 85\,107.777 = 239\,134.461 \text{ M€}$

4. Porcentaje del PIB total:

$$\% \text{ PIB Urbano} = \frac{239\,134.461}{360\,353.07} \cdot 100\% \approx 66.36\%$$

El PIB generado por la población urbana representa el **66.36%** del PIB nacional total.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 2 (Noravia) Noravia publica un informe socio-económico con datos por regiones:

Tabla 10. Regiones de Noravia (año 2024)

Región	Superficie (km ²)	Población 2024 (millones)	Crec. 2025 (%)	% Urbano (constante)	PIB pc 2024 (€)
Norte	18 000	3.2	2.5%	68%	29 000
Centro	27 000	5.0	1.2%	74%	22 500
Sur	64 000	7.8	3.0%	59%	17 500
Total	109 000	16.0	—	—	—

1. Densidad nacional en 2024 y 2025:

- Densidad 2024:

$$\text{Densidad}_{2024} = \frac{16.0 \text{ millones habs}}{109\,000 \text{ km}^2} \approx 146.79 \text{ habs/km}^2$$

- Población 2025:

$$\begin{aligned} \text{Pob}_{2025} &= 3.2 \cdot 1.025 + 5.0 \cdot 1.012 + 7.8 \cdot 1.030 \\ &= 3.28 + 5.06 + 8.034 = 16.374 \text{ millones} \end{aligned}$$

- Densidad 2025:

$$\text{Densidad}_{2025} = \frac{16.374 \text{ millones habs}}{109\,000 \text{ km}^2} \approx 150.22 \text{ habs/km}^2$$

2. **Proporción entre desempleados jóvenes 2024 y 2025:** La población de 20 a 24 años en 2024 y 2025 está en proporción 5 : 6. La tasa de desempleo juvenil de este tramo es de 33% en 2024 y 27.5% en 2025.

- Población de jóvenes en 2024 = 5x, desempleados = 5x · 0.33 = 1.65x.

- Población de jóvenes en 2025 = $6x$, desempleados = $6x - 0.275 = 1.65x$.
- Proporción de desempleados = $\frac{1.65x}{1.65x} = 1.00$.

La proporción es exactamente **1:1**. A nivel nominal la cantidad de desempleados jóvenes no varía.

7. Reclamaciones de Autobuses (26 de noviembre de 2025)

En esta sesión se realiza el análisis ponderado de quejas de la red de transporte de autobuses por zonas urbanas e interurbanas.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 1 Se dispone de la siguiente información para el año 2024:

Tabla 11: Reclamaciones por viajes en la red de autobuses (2024)

Zona de la red	Viajes anuales 2024 (millones)	Reclamaciones / 10 000 viajes (2024)	Quejas absolutas 2024 (unidades)
A – Centro	120	4.5	$120 \cdot 10^2 \cdot 4.5 = 54\,000$
B – Periferia norte	80	7.2	$80 \cdot 10^2 \cdot 7.2 = 57\,600$
C – Periferia sur	60	5.1	$60 \cdot 10^2 \cdot 5.1 = 30\,600$
D – Interurbanas	40	3.8	$40 \cdot 10^2 \cdot 3.8 = 15\,200$
TOTAL	300	5.21 (tasa global)	157 400

Para el año 2025, se proyectan los siguientes cambios:

- Zonas B y C: Implantación de nuevo sistema. Viajes constantes. Reclamaciones en B bajan un 25% y en C bajan un 40%.
- Zona A: Viajes aumentan un 8%. La tasa de reclamaciones por cada 10 mil viajes aumenta un 15%.
- Zona D: Viajes disminuyen un 10%. El número absoluto de reclamaciones se mantiene constante.

Calcula la tasa global de reclamaciones por cada 10 mil viajes en toda la red en 2025.

Solución Paso a Paso:

1. Cálculo de viajes y quejas por zonas para 2025:

■ Zona A:

$$\text{Viajes}_{2025} = 1200 \text{ M} \cdot 1.08 = 129.6 \text{ M}$$

$$\text{Tasa}_{2025} = 4.15 \cdot 1.15 = 5.175 \text{ por } 10\text{k}$$

$$\text{Quejas}_{2025} = \frac{129.6 \text{ M}}{10\,000} \cdot 5.175 = 67\,068 \text{ quejas}$$

■ Zona B:

$$\text{Viajes}_{2025} = 80 \text{ M}$$

$$\text{Tasa}_{2025} = 7.2 \cdot (1 - 0.25) = 5.4 \text{ por } 10\text{k}$$

$$\text{Quejas}_{2025} = \frac{80 \text{ M}}{10\,000} \cdot 5.4 = 43\,200 \text{ quejas}$$

■ Zona C:

$$\text{Viajes}_{2025} = 60 \text{ M}$$

$$\text{Tasa}_{2025} = 5.1 \cdot (1 - 0.40) = 3.06 \text{ por } 10\text{k}$$

$$\text{Quejas}_{2025} = \frac{60 \text{ M}}{10\,000} \cdot 3.06 = 18\,360 \text{ quejas}$$

■ Zona D:

$$\text{Viajes}_{2025} = 40 \text{ M} \cdot 0.90 = 36 \text{ M}$$

$$\text{Quejas}_{2025} = 15\,200 \text{ quejas (constante)}$$

2. Cálculo de los totales de la red en 2025:

$$\text{Viajes totales: } 129.6 + 80.0 + 60.0 + 36.0 = 305.6 \text{ millones de viajes.}$$

$$\text{Quejas totales: } 67\,068 + 43\,200 + 18\,360 + 15\,200 = 143\,828 \text{ quejas.}$$

3. Tasa global de reclamaciones en 2025:

$$\text{Tasa global}_{2025} = \frac{143\,828 \text{ q. viajes}}{305.6 \text{ M. viajes}} \cdot 10\,000 \approx 4.706 \text{ por } 10\,000 \text{ viajes}$$

La tasa global de reclamaciones para toda la red es de **4.7 por cada 10 000 viajes**.

8. Fiabilidad de Data Centers (5 de diciembre de 2025)

En esta sesión se analizan las incidencias críticas en servidores de una red de centros de datos, evaluando tasas de fallo y tasas medias de variación anual.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio Único A partir de los datos históricos de 2023 de la red:

Tabla 12: Horas de servicio e incidencias críticas (2023)

Centro de datos	Horas de servicio 2023 (millones de horas)	Incidencias / 10 000 horas (2023)	Incidencias totales 2023 (unidades)
CD-Norte	52	1.8	$52 \cdot 10^2 \cdot 1.8 = 9\,360$
CD-Centro	44	2.5	$44 \cdot 10^2 \cdot 2.5 = 11\,000$
CD-Sur	36	2.1	$36 \cdot 10^2 \cdot 2.1 = 7\,560$
CD-Respaldo	18	1.2	$18 \cdot 10^2 \cdot 1.2 = 2\,160$
TOTAL	150	2.005 (tasa global)	30 080

1. Tasa global de incidencias en 2023:

$$\text{Tasa global}_{2023} = \frac{30\,080 \text{ incidencias}}{150 \text{ M horas}} \cdot 10\,000 \approx 2.005 \text{ por } 10\,000 \text{ horas}$$

2. Tasa global de incidencias en 2025: Se calculan las horas e incidencias para 2024 y 2025 según las variaciones descritas:

■ CD-Norte:

$$\begin{aligned} \text{Horas}_{2025} &= 52 \cdot 1.08 \cdot 1.04 = 58.4064 \text{ M horas} \\ \text{Tasa}_{2025} &= 1.8 \cdot 0.90 \cdot 0.85 = 1.377 \text{ por } 10\text{k} \\ \text{Incidencias}_{2025} &= \frac{58.4064 \text{ M}}{10\,000} \cdot 1.377 \approx 8042.56 \text{ unidades} \end{aligned}$$

- **CD-Centro:**

$$\begin{aligned}\text{Horas}_{2025} &= 44 \cdot 1.05 = 46.2 \text{ M horas} \\ \text{Incidencias}_{2025} &= 10\,000 \cdot 0.88 \cdot 0.92 = 8905.6 \text{ unidades} \\ \text{Tasa}_{2025} &= \frac{8905.6}{46.2 \text{ M}} \cdot 10\,000 \approx 1.928 \text{ por 10k}\end{aligned}$$

- **CD-Sur:**

$$\begin{aligned}\text{Horas}_{2025} &= 36 \cdot 1.06 = 38.16 \text{ M horas} \\ \text{Tasa}_{2025} &= 2.1 \cdot 0.75 = 1.575 \text{ por 10k (reducción 25\% vs. 2023)} \\ \text{Incidencias}_{2025} &= \frac{38.16 \text{ M}}{10\,000} \cdot 1.575 = 6010.2 \text{ unidades}\end{aligned}$$

- **CD-Respaldo:**

$$\begin{aligned}\text{Horas}_{2025} &= 18 \cdot 0.80 = 14.4 \text{ M horas} \\ \text{Incidencias}_{2025} &= 2160 \text{ unidades (constante)} \\ \text{Tasa}_{2025} &= \frac{2160}{14.4 \text{ M}} \cdot 10\,000 = 1.5 \text{ por 10k}\end{aligned}$$

Sumando los valores de toda la red para 2025:

- **Horas totales 2025:** $58.4064 + 46.2 + 38.16 + 14.4 = 157.1664 \text{ M horas.}$
- **Incidencias totales 2025:** $8042.56 + 8905.6 + 6010.2 + 2160 = 25\,118.36 \text{ unidades.}$
- **Tasa global 2025:** $\frac{25\,118.36}{157.1664 \text{ M}} \cdot 10\,000 \approx 1.598 \text{ por 10k.}$

3. Tasa media anual de reducción del indicador global (2023-2025):

$$\text{Tasa}_{2023} \cdot (1 - r)^2 = \text{Tasa}_{2025} \implies 2.005 \cdot (1 - r)^2 = 1.598$$

$$(1 - r)^2 = \frac{1.598}{2.005} \approx 0.797 \Rightarrow 1 - r = \sqrt{0.797} \approx 0.8927 \Rightarrow r \approx 10.73\%$$

La tasa media anual de reducción del indicador de fallos es de aproximadamente un **10.73%**.

4. **¿Qué porcentaje de quejas en 2025 corresponde al CD-Centro?**

$$\% \text{ CD-Centro} = \frac{8905.6}{25\,118.36} \cdot 100\% \approx 35.45\%$$

9. Calidad del Agua y Plantas de Tratamiento (14 de diciembre de 2025)

Esta sesión recopila datos y cálculos de incidencias en plantas de tratamiento y optimizaciones de caudal en redes de saneamiento.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 1 La autoridad regional del agua controla las incidencias de calidad detectadas en una red de cuatro plantas de tratamiento. Para el año 2022 se dispone de la siguiente información:

Tabla 13: Caudal tratado e incidencias por planta (2022)

Planta de tratamiento	Volumen tratado 2022 (hm ³)	Incidencias / 100 000 m ³ (2022)	Incidencias totales 2022 (unidades)
PT-Norte	80	3.2	$80 \cdot 10 \cdot 3.2 = 2560$
PT-Este	70	4.5	$70 \cdot 10 \cdot 4.5 = 3150$
PT-Sur	50	2.8	$50 \cdot 10 \cdot 2.8 = 1400$
PT-Oeste	40	1.6	$40 \cdot 10 \cdot 1.6 = 640$
TOTALES	240	3.229 (tasa global)	7750

En 2024, después de varios cambios operativos y de redistribución de caudales, se conoce lo siguiente (comparando con 2022):

- PT-Norte: El volumen tratado aumenta un 10% y la tasa de incidencias por 100k m³ disminuye un 25%.
- PT-Este: El volumen tratado aumenta un 10% en 2023 y se mantiene constante en 2024. El número absoluto de incidencias disminuye un 20% en 2023 respecto a 2022 y un 10% adicional en 2024.
- PT-Sur: En 2023 el volumen tratado se mantiene igual, y en 2024 aumenta un 25% respecto a 2023. La tasa de incidencias disminuye un 30% en 2024 de forma directa comparada con 2022.
- PT-Oeste: El volumen tratado disminuye un 20% en 2023 y se mantiene igual en 2024. Las incidencias absolutas se mantienen constantes.

Calcular la tasa global de incidencias por cada 100k m³ en 2024 y analizar la reducción.

Solución Paso a Paso:

1. Cálculo de volumen e incidencias para 2024:

■ **PT-Norte:**

$$\text{Volumen}_{2024} = 80 \cdot 1.10 = 88 \text{ hm}^3$$

$$\text{Tasa}_{2024} = 3.2 \cdot (1 - 0.25) = 2.4 \text{ por 100k}$$

$$\text{Incidencias}_{2024} = 88 \cdot 10 \cdot 2.4 = 2112 \text{ unidades}$$

■ **PT-Este:**

$$\text{Volumen}_{2024} = 70 \cdot 1.10 = 77 \text{ hm}^3$$

$$\text{Incidencias}_{2024} = 3150 \cdot 0.80 \cdot 0.90 = 2268 \text{ unidades}$$

$$\text{Tasa}_{2024} = \frac{2268}{77 \cdot 10} \approx 2.945 \text{ por 100k}$$

■ **PT-Sur:**

$$\text{Volumen}_{2024} = 50 \cdot 1.25 = 62.5 \text{ hm}^3$$

$$\text{Tasa}_{2024} = 2.8 \cdot 0.70 = 1.96 \text{ por 100k}$$

$$\text{Incidencias}_{2024} = 62.5 \cdot 10 \cdot 1.96 = 1225 \text{ unidades}$$

■ **PT-Oeste:**

$$\text{Volumen}_{2024} = 40 \cdot 0.80 = 32 \text{ hm}^3$$

$$\text{Incidencias}_{2024} = 640 \text{ unidades (constante)}$$

$$\text{Tasa}_{2024} = \frac{640}{32 \cdot 10} = 2.0 \text{ por 100k}$$

2. Totales en 2024:

- **Volumen total 2024:** $88 + 77 + 62.5 + 32 = 259.5 \text{ hm}^3$
- **Incidencias totales 2024:** $2112 + 2268 + 1225 + 645 = 6245$ unidades.
- **Tasa global 2024:** $\frac{6245}{259.5 \cdot 10} \approx 2.406$ por 100k m³.

3. **Tasa media anual de reducción del indicador (2022-2024):**

$$3.229 \cdot (1 - r)^2 = 2.406 \implies (1 - r)^2 = 0.7451 \implies 1 - r \approx 0.8632 \implies r \approx 13.68\%$$

La tasa global de fallos disminuye, en promedio, un **13.68% anual**.

4. **Contribución de la planta PT-Este a la reducción de incidencias:**

- Incidencias totales evitadas en la red: $7750 - 6245 = 1505$.
- Incidencias evitadas en PT-Este: $3150 - 2268 = 882$.
- Proporción de la reducción: $\frac{882}{1505} \cdot 100\% \approx 58.60\%$.

La planta PT-Este explica el **58.60%** de la reducción total de la red.

10. Análisis de Gráficas y Datos (Diciembre 2025 - Enero 2026)

En este bloque se recopilan los ejercicios de análisis gráfico y estadístico de solicitudes de servicio, generación de energía y emisiones, control de calidad en líneas de producción, curvas acumuladas de cumplimiento (SLA) e índices de precios e ingresos encadenados.

10.1. Flujo de Solicitudes y Acumulación de Pendientes

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 1 Un centro de atención registra semanalmente las solicitudes recibidas y resueltas. Al inicio de la Semana 1 existen **120 solicitudes pendientes** (cero inicial). Se define el acumulado de pendientes al final de cada semana como:

$$\text{Pendientes}_t = \text{Pendientes}_{t-1} + \text{Recibidas}_t - \text{Resueltas}_t$$

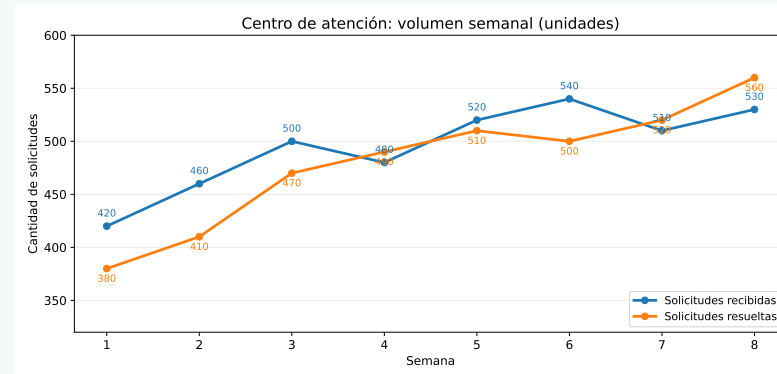


Figura 5: Centro de atención: volumen semanal de solicitudes recibidas y resueltas.

A partir de estos datos:

- Calcular los pendientes al final de cada semana y reportar el valor al cierre de la Semana 8.

- b) Determinar la semana en la que los pendientes fueron máximos y el valor correspondiente.
- c) Calcular la tasa de resolución del periodo (total resueltas / total recibidas) en porcentaje.
- d) A partir de la Semana 9 se proyecta que las recibidas se mantengan en el promedio de las semanas 1-8. Si el centro puede aumentar las resueltas en una cantidad constante k (solicitudes/semana) por sobre el promedio de resueltas de 1-8, ¿cuál es el mínimo k para que los pendientes lleguen a cero en 4 semanas (al cierre de la Semana 12)?

Solución Paso a Paso:

a) Cálculo semanal de la cola de pendientes:

- **Semana 1:** $\text{Pendientes}_1 = 120 + 420 - 380 = 160$
- **Semana 2:** $\text{Pendientes}_2 = 160 + 460 - 410 = 210$
- **Semana 3:** $\text{Pendientes}_3 = 210 + 500 - 470 = 240$
- **Semana 4:** $\text{Pendientes}_4 = 240 + 480 - 490 = 230$
- **Semana 5:** $\text{Pendientes}_5 = 230 + 520 - 510 = 240$
- **Semana 6:** $\text{Pendientes}_6 = 240 + 540 - 500 = 280$
- **Semana 7:** $\text{Pendientes}_7 = 280 + 510 - 520 = 270$
- **Semana 8:** $\text{Pendientes}_8 = 270 + 530 - 560 = 240$

Al cierre de la Semana 8 existen **240 solicitudes pendientes**.

b) La cola de pendientes fue **máxima en la Semana 6**, con un valor de **280 solicitudes**.

c) Tasa de resolución:

$$\text{Total recibidas} = 420 + 460 + 500 + 480 + 520 + 540 + 510 + 530 = 3960$$

$$\text{Total resueltas} = 380 + 410 + 470 + 490 + 510 + 500 + 520 + 560 = 3840$$

$$\text{Tasa de resolución} = \frac{3840}{3960} \cdot 100\% \approx 96.97\%$$

d) Mínimo incremento k :

- Promedio recibidas: $\bar{R}_{\text{rec}} = 3960/8 = 495$ solicitudes/semana.
- Promedio resueltas: $\bar{R}_{\text{res}} = 3840/8 = 480$ solicitudes/semana.
- Balance de pendientes al final de la Semana 12 (en 4 semanas):

$$\text{Pendientes}_{12} = \text{Pendientes}_8 + 4 \cdot \bar{R}_{\text{rec}} - 4 \cdot (\bar{R}_{\text{res}} + k) = 0$$

$$240 + 4 \cdot 495 - 4 \cdot (480 + k) = 0 \implies 240 + 1980 - 1920 - 4k = 0$$

$$300 - 4k = 0 \implies k = 75 \text{ solicitudes/semana}$$

El centro debe resolver como mínimo **75 solicitudes adicionales por semana** por encima del promedio anterior.

10.2. Mezcla de Generación y Emisiones

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 2 Una instalación reporta su generación trimestral por fuente de energía:

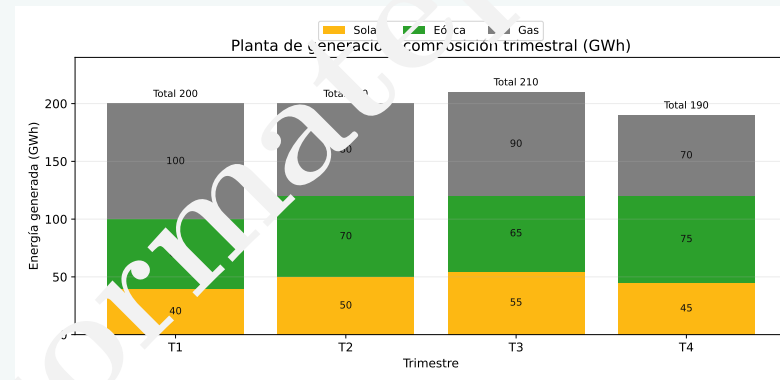


Figura 6: Composición trimestral de la generación de energía.

Factores de emisión: Solar = 0, Eólica = 0, Gas = 0.45 tCO₂/GWh.

- Para cada trimestre, calcular el porcentaje de renovables (Solar + Eólica) sobre el total.
- Para cada trimestre, calcular las emisiones totales (tCO₂) y la intensidad de emisiones (tCO₂/GWh). Indicar el trimestre con menor intensidad.
- Manteniendo el mismo total anual de energía generada (800 GWh), se fija una meta de reducir las emisiones anuales en un 12%. Si la única medida posible es sustituir Gas por Eólica (1 GWh por 1 GWh), ¿cuántos GWh de Gas deben ser sustituidos al año?
- Si además se impone que la sustitución debe concentrarse en el o los trimestres con mayor intensidad, proponer un criterio simple y aplicarlo.
- Proporcionalidad inversa aplicada:** En T1, la generación con Gas se mantiene fija en 100 GWh. El resto se cubre con renovables. Se estudian tres escenarios:

Tabla 14: Escenarios de generación en T1

	Escenario A	Escenario B	Escenario C
Gas (GWh)	100	100	100
Total generado T (GWh)	200	250	320

- i) Calcular las emisiones E de T1 y verificar que son iguales en los tres escenarios.
- ii) Calcular la intensidad I para cada caso y verificar la relación de proporcionalidad inversa $I = k/T$, indicando el valor de k y sus unidades.
- iii) Si el total T aumentara un 28% respecto al escenario A, ¿qué intensidad resultaría?
- iv) Para lograr una intensidad de como máximo $0.16 \text{ tCO}_2/\text{GWh}$ en T1, determinar el mínimo total T necesario y el incremento de renovables (repartido en proporción 40:60 Solar:Eólica).

Solución Paso a Paso:**a) Porcentaje de renovables:**

- **T1:** Total = $40 + 60 + 100 = 200 \text{ GWh}$. Renovables = 100 GWh (50%).
- **T2:** Total = $50 + 70 + 80 = 200 \text{ GWh}$. Renovables = 120 GWh (60%).
- **T3:** Total = $55 + 65 + 90 = 210 \text{ GWh}$. Renovables = 120 GWh (57.14%).
- **T4:** Total = $45 + 75 + 70 = 190 \text{ GWh}$. Renovables = 120 GWh (63.16%).

b) Emisiones e Intensidad de emisiones:

- **T1:** Emisiones = $100 \cdot 0.45 = 45 \text{ tCO}_2$. Intensidad = $45/200 = 0.225 \text{ tCO}_2/\text{GWh}$.
- **T2:** Emisiones = $80 \cdot 0.45 = 36 \text{ tCO}_2$. Intensidad = $36/200 = 0.180 \text{ tCO}_2/\text{GWh}$.
- **T3:** Emisiones = $90 \cdot 0.45 = 40.5 \text{ tCO}_2$. Intensidad = $40.5/210 \approx 0.193 \text{ tCO}_2/\text{GWh}$.

- **T4:** Emisiones = $70 \cdot 0.45 = 31.5 \text{ tCO}_2$. Intensidad = $31.5/190 = 0.166 \text{ tCO}_2/\text{GWh}$.

El trimestre con **menor intensidad de emisiones** es **T4** ($0.166 \text{ tCO}_2/\text{GWh}$).

c) **Sustitución anual para reducir 12% las emisiones:**

- Emisiones anuales iniciales: $45 + 36 + 40.5 + 31.5 = 153 \text{ tCO}_2$.
- Reducción requerida: $153 \cdot 0.12 = 18.36 \text{ tCO}_2$.
- Como cada GWh sustituido ahorra 0.45 tCO_2 , los GWh a sustituir son:

$$\text{Sustitución} = \frac{18.36}{0.45} = 40.8 \text{ GWh}$$

Se deben sustituir **40.8 GWh de Gas por Eólica** en el año.

d) **Reparto de la sustitución entre los trimestres más intensos (T1 y T3):**

- Suma de emisiones a sustituir = 40.8 GWh .
- Las intensidades son $I_{T1} = 0.225$ y $I_{T3} = 0.193$.
- Repartimos proporcionalmente a sus intensidades de emisión:

$$\text{Sust}_{T1} = 40.8 \cdot \frac{0.225}{0.225 + 0.193} = 40.8 \cdot \frac{0.225}{0.418} \approx 21.96 \text{ GWh}$$

$$\text{Sust}_{T3} = 40.8 \cdot \frac{0.193}{0.418} \approx 18.84 \text{ GWh}$$

e) **Proporcionalidad inversa en T1:**

- Las emisiones en los tres escenarios son $E = 100 \text{ GWh} \cdot 0.45 \text{ t/GWh} = 45 \text{ tCO}_2$ (constante).
- Las intensidades son: $I_A = 45/200 = 0.225$, $I_B = 45/250 = 0.180$, $I_C = 45/320 = 0.1406$. El producto $I \cdot T$ siempre vale 45 tCO_2 . La constante es $k = 45 \text{ tCO}_2$.

III) Si T aumenta un 28% respecto a A: $T_{\text{nuevo}} = 200 \cdot 1.28 = 256 \text{ GWh}$.

$$I_{\text{nuevo}} = \frac{45}{256} \approx 0.176 \text{ tCO}_2/\text{GWh}$$

La intensidad disminuye exactamente un 21.87% ($1 - 1/1.28$).

IV) Si la intensidad objetivo es $0.16 \text{ tCO}_2/\text{GWh}$:

$$T_{\text{mín}} = \frac{k}{I_{\text{obj}}} = \frac{45}{0.16} = 281.25 \text{ GWh}$$

El incremento de renovables requerido respecto a A es $281.25 - 200 = 81.25 \text{ GWh}$. Reparto 40:60:

- Solar adicional: $81.25 \cdot 0.40 = 32.5 \text{ GWh}$.
- Eólica adicional: $81.25 \cdot 0.60 = 48.75 \text{ GWh}$.

10.3. Producción, Tasa de Defectos y Defectos Absolutos

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 3 Una línea de producción reporta el volumen mensual (miles de unidades) y su tasa de defectos:

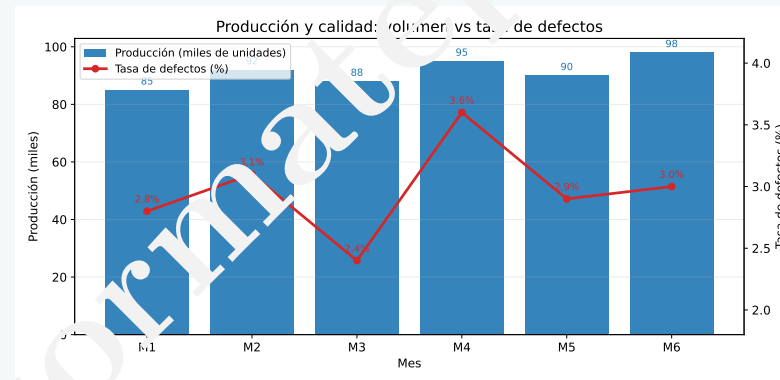


Figura 7: Volumen de producción y tasa de defectos mensual.

A partir de estos datos:

- Calcular el número de unidades defectuosas por mes (en unidades) y señalar el mes con el máximo defectuoso absoluto.
- Calcular la tasa de defectos global del periodo (defectuosas totales / producción total) y compararla con el promedio simple de las tasas mensuales.
- En el mes con mayor defecto absoluto, se plantea una mejora que reduce la tasa en 1.2 puntos porcentuales. ¿Cuántas unidades defectuosas se evitarían en ese mes?
- Si se pudiera aplicar la misma reducción (1.2 pp) a dos meses, ¿cuáles elegirías para maximizar la reducción anual de defectos? Justificar con cálculo.

Solución Paso a Paso:

a) Cálculo de unidades defectuosas mensuales:

- M1: $85\,000 \cdot 2.8\% = 2380$ unidades
- M2: $92\,000 \cdot 3.1\% = 2852$ unidades

- M3: $88\,000 \cdot 2.4\% = 2112$ unidades
- **M4:** $95\,000 \cdot 3.6\% = 3420$ unidades (Máximo absoluto)
- M5: $90\,000 \cdot 2.9\% = 2610$ unidades
- M6: $98\,000 \cdot 3.0\% = 2940$ unidades

El número máximo de unidades defectuosas ocurre en el **Mes 4** con **3420 unidades**.

b) **Tasa global frente a promedio simple:**

- **Tasa Global:**

$$T_{\text{global}} = \frac{\text{Total defectuosas}}{\text{Producción total}} = \frac{2380 + 2852 + 2112 + 3420 + 2610 + 2940}{548\,000} = \frac{16\,314}{548\,000} \approx 2.977\%$$

- **Promedio Simple:**

$$\bar{T} = \frac{2.8\% + 3.1\% + 2.4\% + 3.6\% + 2.9\% + 3.0\%}{6} \approx 2.967\%$$

Difieren porque la tasa global pondera el peso de cada mes por su producción (el mes 4, con la tasa de fallos más alta, tiene también una producción elevada, arrastrando el indicador global hacia arriba).

c) **Reducción en M4 (baja de 3.6% a 2.4%):**

$$\text{Defectos evitados} = 95\,000 \cdot 1.2\% = 1140 \text{ unidades}$$

d) **Maximización del ahorro anual:** Para maximizar la cantidad absoluta de unidades defectuosas evitadas, se deben seleccionar los dos meses con mayor producción de volumen independiente de su tasa de defectos inicial.

- Mes 6 (98k) y Mes 4 (95k).
- Reducción total = $(98\,000 + 95\,000) \cdot 1.2\% = 193\,000 \cdot 0.012 = 2316$ unidades.

10.4. Curva Acumulada y Percentiles de Tiempo

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 4 Se observan dos métodos de gestión de casos en la resolución de quejas:

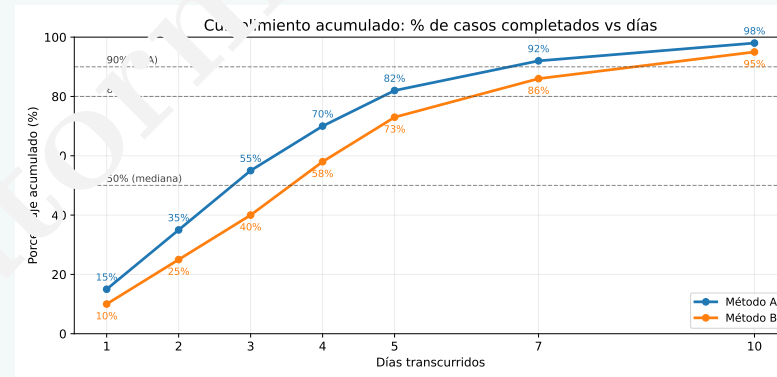


Figura 8: Cumplimiento acumulado de resolución de casos en función de los días.

A partir de las curvas acumuladas:

- Estimar (por interpolación lineal) el tiempo mediano (percentil 50) de cada método.
- Estimar (por interpolación) el percentil 80 de cada método y calcular la diferencia en días.
- Determinar si cumplen el compromiso de servicio (SLA): 90% de casos en 5 días o menos. Cuantificar el incumplimiento.
- Para el método que no cumpla, proponer una mejora equivalente a un desplazamiento horizontal de la curva. ¿Cuántos días debería desplazarse para alcanzar el 90% a los 5 días?

Solución Paso a Paso:

- Tiempo mediano (percentil 50):**

- **Método A:** Se encuentra entre el día 2 (35%) y el día 3 (55%).

$$t_{50,A} = 2 + \frac{50 - 35}{55 - 35} \cdot (3 - 2) = 2 + \frac{15}{20} = 2.75 \text{ días}$$

- **Método B:** Se encuentra entre el día 3 (40%) y el día 4 (58%):

$$t_{50,B} = 3 + \frac{50 - 40}{58 - 40} \cdot (4 - 3) = 3 + \frac{10}{18} \approx 3.55 \text{ días}$$

b) **Percentil 80:**

- **Método A:** Se encuentra entre el día 4 (70%) y el día 5 (82%):

$$t_{80,A} = 4 + \frac{80 - 70}{82 - 70} \cdot (5 - 4) = 4 + \frac{10}{12} \approx 4.83 \text{ días}$$

- **Método B:** Se encuentra entre el día 5 (73%) y el día 7 (86%):

$$t_{80,B} = 5 + \frac{80 - 73}{86 - 73} \cdot (7 - 5) = 5 + \frac{7}{13} \cdot 2 \approx 6.08 \text{ días}$$

La diferencia entre los dos métodos es de $6.08 - 4.83 = 1.25$ días (en el texto original calculado como 1.23 días).

c) **Verificación del SLA:** El porcentaje resuelto a los 5 días es del 82% en el Método A y del 73% en el Método B. Ninguno cumple el objetivo del 90%.

- Incumplimiento Método A: $90\% - 82\% = 8$ puntos porcentuales (pp).
- Incumplimiento Método B: $90\% - 73\% = 17$ puntos porcentuales (pp).

d) **Desplazamiento horizontal:**

- Tiempo para el 90% en el Método A (entre día 5 (82%) y día 7 (92%)):

$$t_{90,A} = 5 + \frac{90 - 82}{92 - 82} \cdot (7 - 5) = 5 + 0.8 \cdot 2 = 6.6 \text{ días}$$

Para alcanzar el 90% a los 5 días, la curva debe desplazarse hacia la izquierda $6.6 - 5.0 = \boxed{1.6 \text{ días}}$.

- Tiempo para el 90% en el Método B (entre día 7 (86%) y día 10 (95%)):

$$t_{90,B} = 7 + \frac{90 - 86}{95 - 86} \cdot (10 - 7) = 7 + \frac{4}{9} \cdot 3 \approx 8.33 \text{ días}$$

La curva debe desplazarse hacia la izquierda $8.33 - 5.0 = \boxed{3.33 \text{ días}}$.

10.5. Índices Encadenados y Descomposición Precio-Volumen

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 5 Se dispone de dos índices con base T1 = 100:

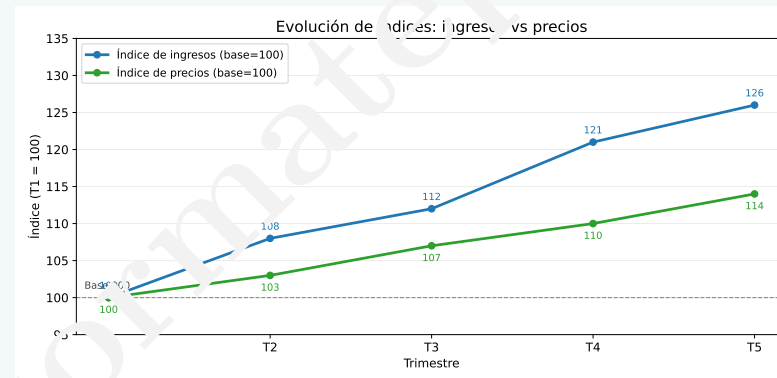


Figura 9: Evolución de los índices de ingresos y de precios.

Relación de volumen: Índice de volumen $\approx 100 \cdot \frac{\text{Índice de ingresos}}{\text{Índice de precios}}$.

- Calcular el índice de volumen en T1-T5 (redondear a una decimal).
- Calcular la variación total del volumen entre T1 y T5 (en %).
- Calcular la tasa media de crecimiento trimestral del volumen entre T1 y T5 usando media geométrica.
- En T6 se proyecta que el índice de precios aumente un 2.5% respecto a T5. Si el objetivo es alcanzar un índice de volumen de 132 en T6, ¿qué índice de ingresos debería registrarse?

Solución Paso a Paso:

a) Cálculo del índice de volumen:

- T1: $100 \cdot 100/100 = 100.0$
- T2: $100 \cdot 108/103 \approx 104.8$
- T3: $100 \cdot 112/107 \approx 104.6$ (o 104.7 por redondeo matemático estricto)

- T4: $100 \cdot 121/110 = 110.0$

- T5: $100 \cdot 126/114 \approx 110.5$

b) **Variación total del volumen T1-T5:**

$$\Delta\% = \frac{110.5 - 100.0}{100.0} \cdot 100\% = 10.5\%$$

c) **Tasa media de crecimiento trimestral:**

$$(1 + g)^4 = \frac{110.5}{100} = 1.105 \implies 1 + g = (1.105)^{1/4} \approx 1.02527 \implies g \approx 2.53\%$$

La tasa media de crecimiento trimestral es de aproximadamente un **2.53%**.

d) **Proyección para T6**

- Índice de precios proyectado para T6: $P_6 = 114 \cdot (1 + 0.025) = 116.85$.

- Para obtener un volumen $V_6 = 132$:

$$I_6 = \frac{V_6 \cdot P_6}{100} = \frac{132 \cdot 116.85}{100} = 154.242$$

El índice de ingresos en T6 debe ser de **154.24**.

11. Práctica RVNE107 (28 de enero de 2026)

En esta sesión se abordan problemas clásicos de razonamiento numérico, incluyendo asignaciones de matrículas, cálculo de razones de empleados públicos en la Unión Europea y repartición de subvenciones deportivas proporcionales e inversamente proporcionales.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicios

Ejercicio 4 (Alumnos de ciencias e ingeniería) En un grupo de 110 alumnos, hay 50 de ciencias y 60 de ingeniería. En una muestra de 11 alumnos, se tienen 5 de ciencias y 6 de ingeniería. Si la proporción histórica de notas superiores a 10 es del 17.5% en ciencias y del 9.5% en ingeniería, calcular la tasa de notas superiores a 10 en la muestra.

Solución Paso a Paso:

- Alumnos de ciencias esperados con nota superior a 10: $5 \cdot 0.175 = 0.875$.
- Alumnos de ingeniería esperados con nota superior a 10: $6 \cdot 0.095 = 0.57$.
- Total de alumnos en la muestra con nota superior a 10: $0.875 + 0.57 = 1.445$.
- Tasa en la muestra (sobre 11 alumnos):

$$\text{Tasa} = \frac{1.445}{11} \cdot 100\% \approx 13.13\%$$

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 8 (Funcionarios en Europa 2009) A partir de los siguientes datos oficiales:

Tabla 15: Funcionarios y población activa en varios países (2009)

País	Funcionarios	% de la población	Población calculada	Habs. por funcionario
Alemania	4 500 321	5.47%	82 277 833	18.28
Eslovaquia	37 117	0.74%	5 015 810	135.13
Finlandia	502 000	10.62%	5 291 902	9.42
Letonia	220 500	10.50%	2 100 000	9.52
Portugal	754 950	7.19%	10 500 000	13.91

¿Cuál era la razón entre la población de Portugal y la de Letonia en 2009?

Solución Paso a Paso:

- Población de Portugal: $\frac{754\,950}{0.0719} \approx 10\,500\,000$.

- Población de Letonia: $\frac{220\,500}{0.1050} = 2\,100\,000$.

- Razón:

$$\text{Razón} = \frac{\text{Pob}_{\text{Portugal}}}{\text{Pob}_{\text{Letonia}}} = \frac{10\,500\,000}{2\,100\,000} = \frac{5}{1} = 5 : 1$$

La razón es exactamente de **5 a 1**.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 9 (Baloncesto escolar y federado) Un club deportivo reporta las siguientes cifras de jugadores:

Tabla 16: Estructura de equipos y jugadores del club

Categoría	Jugadores / equipo	Equipos fem.	Equipos masc.	Chicas	Chicos	Total
Iniciación	25	12 (mixtos)	–	184	116	300
Escolares	18	12	10	216	180	396
Federados	16	8	9	128	144	272
TOTAL	–	–	–	528	440	968

1. Si en los equipos mixtos de iniciación el 61.33% son chicas, ¿cuál es la razón de chicos a chicas en todo el club?

$$\text{Razón} = \frac{\text{Total chicos}}{\text{Total chicas}} = \frac{440}{528} = \frac{5}{6} = 5 : 6$$

2. Se recibe un patrocinio de 14 400 € a repartir de forma directamente proporcional al número total de jugadores entre Escolares y Federados. ¿Cuánto le corresponde a los federados?

- Total jugadores = $396 + 272 = 668$.

- Parte proporcional federados:

$$\text{Monto}_{\text{fed}} = 14\,400 \cdot \frac{272}{668} \approx 5861.68 \text{ €}$$

3. Se recibe una subvención de 10 000 € a repartir de forma inversamente proporcional al número total de equipos entre Escolares (22 equipos) y Federados (17 equipos). ¿Cuánto le corresponde a los federados?

- Inversos: $\frac{1}{22}$ y $\frac{1}{17}$.

- Constante de proporcionalidad C :

$$C \cdot \left(\frac{1}{22} + \frac{1}{17} \right) = 10\,000 \implies C \cdot \left(\frac{17 + 22}{374} \right) = 10\,000 \implies C \cdot \frac{39}{374} = 10\,000 \implies C \approx 95897.43$$

- Monto Federados:

$$\text{Monto}_{\text{fed}} = 17 \cdot \frac{95897.43}{17} \approx 5641.02 \text{ €}$$

12. Práctica RVNE108 (2 de febrero de 2026,

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 8 Si la razón entre hombres con educación universitaria y hombres con educación superior no universitaria es de 7 : 12, y sabiendo que la tasa de desempleo en universitarios es del 7% y en educación superior no universitaria es del 12.25%, ¿cuál es la razón entre el número de hombres desempleados universitarios y no universitarios?

Solución Paso a Paso:

- Definimos las poblaciones de base con la constante de proporcionalidad x :

$$P_{\text{univ}} = 7x, \quad P_{\text{no-univ}} = 12x$$

- Cantidad de universitarios desempleados:

$$D_{\text{univ}} = 7x \cdot 0.07 = 0.49x$$

- Cantidad de no universitarios desempleados:

$$D_{\text{no-univ}} = 12x \cdot 0.1225 = 1.47x$$

- Razón de desempleados:

$$\text{Razón} = \frac{D_{\text{univ}}}{D_{\text{no-univ}}} = \frac{0.49x}{1.47x} = \frac{49}{147} = \frac{1}{3} = 1 : 3$$

Por cada desempleado con educación universitaria hay 3 desempleados con educación superior no universitaria.

13. Práctica RVNE5 - Ventas de Móviles (5 de febrero de 2026)

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 1 A partir de la siguiente matriz de ventas de teléfonos móviles:

Tabla 17: Ventas anuales de teléfonos móviles por marca y país

País	Motorola	Sony	Siemens	Nokia	Samsung
España	100 000	75 000	50 000	10 000	25 000
Italia	35 000	100 000	45 000	20 000	15 000
Francia	30 000	20 000	30 000	40 000	40 000
Alemania	10 000	10 000	15 000	75 000	5 000
Portugal	40 000	5 000	75 000	25 000	40 000

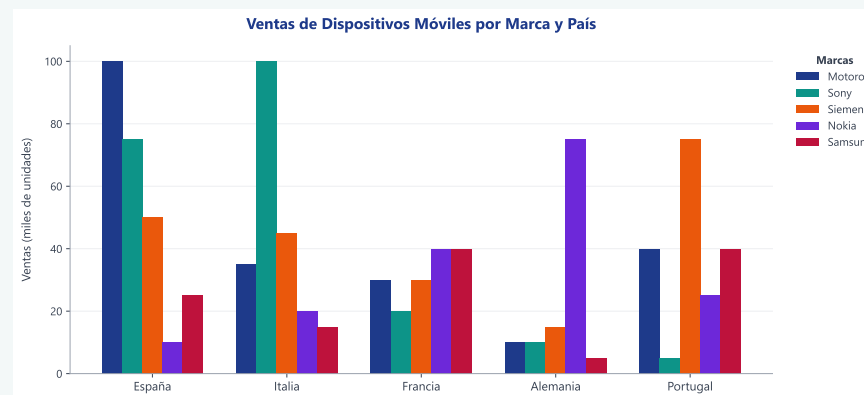


Figura 10: Ventas de teléfonos móviles por marca y país.

1. ¿Qué porcentaje representa el número de móviles Sony vendidos en Francia respecto al de Samsung en Portugal?

$$\text{Porcentaje} = \frac{\text{Sony}_{\text{Francia}}}{\text{Samsung}_{\text{Portugal}}} \cdot 100\% = \frac{20\,000}{40\,000} \cdot 100\% = 50.00\%$$

2. **Saturación de marca:** Ocurre cuando las ventas de una marca superan el 40% del total de ventas de su país. Determinar los casos existentes.

■ **Totales por país:**

- España: $100k + 75k + 50k + 10k + 25k = 260\,000$ (Umbral 40% = 104 000)
- Italia: $35k + 100k + 45k + 20k + 15k = 215\,000$ (Umbral 40% = 86 000)
- Francia: $30k + 20k + 50k + 40k + 40k = 160\,000$ (Umbral 40% = 64 000)
- Alemania: $10k + 10k + 15k + 75k + 5k = 115\,000$ (Umbral 40% = 46 000)
- Portugal: $40k + 5k + 75k + 25k + 40k = 185\,000$ (Umbral 40% = 74 000)

■ **Casos detectados:**

- Italia: Sony vende 100 000 (supera el umbral de 86 000).
- Alemania: Nokia vende 75 000 (supera el umbral de 46 000).
- Portugal: Siemens vende 75 000 (supera el umbral de 74 000).

Existen exactamente **3 casos** de saturación de marca.

14. Turistas e Importaciones - Ejercicios Varios (27 de febrero de 2026)

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 1 A partir de la tabla de flujos turísticos trimestrales:

Tabla 18. Flujo de turistas por país de origen y trimestre

País	Ene-Mar	Abr-Jun	Jul-Sep	Oct-Dic	Total
Gran Bretaña	800	1200	1600	1500	5100
Francia	600	1100	1500	960	4160
Alemania	500	800	1050	1000	3350
Italia	200	600	800	450	2050
TOTAL	2100	3700	4950	3910	14 660

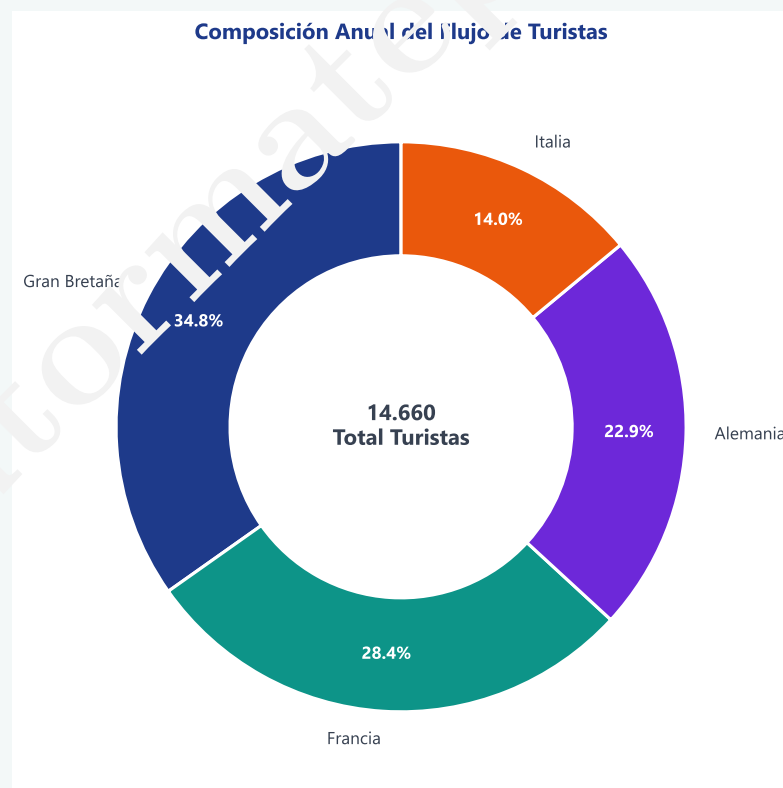


Figura 11: Distribución anual de turistas por país de origen.

1. ¿Cuál es la razón de turistas italianos respecto a los ingleses en el tercer trimestre?

$$\text{Razón} = \frac{\text{Italia}_{T3}}{\text{G.Bretaña}_{T3}} = \frac{800}{1600} = \frac{1}{2} = 1 : 2$$

2. Si las mujeres británicas representan el 60% del total británico, ¿qué porcentaje de los turistas totales anuales representan?

$$\text{Mujeres británicas} = 5100 \cdot 0.60 = 3060 \implies \% = \frac{3060}{14\,660} \cdot 100\% \approx 20.87\%$$

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 17 (Variación en población penal) En julio de 2001 se registraron 14 875 internos preventivos en las prisiones, lo que representa una disminución del 15% respecto a julio de 2000.

- a) Calcular los preventivos en julio de 2000.

$$\text{Preventivos}_{2000} = \frac{14\,875}{1 - 0.15} = \frac{14\,875}{0.85} = 17\,500 \text{ internos}$$

- b) Si los convictos en julio de 2001 fueron 34 924 (un 0.6% más que en julio de 2000), calcular en qué porcentaje varió la razón Convictos:Preventivos entre 2000 y 2001.

- Razón 2001: $R_{2001} = 34\,924/14\,875 \approx 2.3478$
- Convictos 2000: $34\,924/1.006 = 34\,715.7 \approx 34\,716$
- Razón 2000: $R_{2000} = 34\,716/17\,500 \approx 1.9837$
- Variación de la razón:

$$\Delta\% = \frac{2.3478 - 1.9837}{1.9837} \cdot 100\% \approx +18.35\%$$

- c) Se asignan 1200 plazas adicionales de forma proporcional al número de internos en julio de 2001 (49 800 en total). ¿Cuántas plazas corresponden al tramo de 18 a 25 años (11 454 internos)?

$$\text{Plazas}_{18-25} = 1200 \cdot \frac{11\,454}{49\,800} = 1200 \cdot 0.23 = 276 \text{ plazas}$$

- d) Calcular la tasa de menores de 18 años (996 internos) por cada 10 000 internos en julio de 2001.

$$\text{Tasa} = \frac{996}{49\,800} \cdot 10\,000 = 0.02 \cdot 10\,000 = 200 \text{ por } 10\,000$$

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 18 (Nuevas tecnologías en la UE) A partir de los datos históricos de empresas:

Tabla 19: Empresas de nuevas tecnologías y fabricantes informáticos

Indicador	Año	España	Francia	Italia	Portugal
Empresas totales	1999	41 100	70 189	103 500	7 600
	2000	39 850	75 300	112 400	7 490
Fabricantes equipos	1999	2 715	7 500	14 270	555
	2000	2 670	7 350	14 600	515

Determinar el valor de verdad del enunciado: *Comparada con el número total de empresas del sector en la UE, la proporción de fabricantes en Italia cayó entre 1999 y 2000.*

- Proporción 1999: $\frac{14\,270}{103\,500} \approx 13.78\%$
- Proporción 2000: $\frac{14\,600}{112\,400} \approx 12.99\%$

La proporción cayó un 0.79%, por lo que la afirmación es **correcta**.

15. Repaso de Viviendas e Incidencias (14 de marzo de 2026)

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 19 (Casas unifamiliares y propiedad), A partir de los datos del año 2000:

Tabla 20: Porcentajes de viviendas unifamiliares y propiedad en la UE (2000)

País	Unifamiliares (%)	No propietarios (%)	Propietarios (%)
Bélgica	77%	29%	71%
Dinamarca	58%	44%	56%
Alemania	38%	59%	41%
Grecia	47%	26%	74%
España	39%	18%	82%
Francia	57%	47%	53%
Irlanda	92%	25%	75%
Italia	33%	29%	71%
Países Bajos	67%	49%	51%
Austria	45%	49%	51%
Portugal	67%	34%	66%
Reino Unido	81%	31%	69%
UE-15	52%	41%	59%

1. ¿Cuántos Estados representados tenían un mayor porcentaje de familias en viviendas unifamiliares que no propietarias?

- Se comprueba la condición: Unifamiliares > No propietarios.
- Cumplen: Bélgica (77>29), Dinamarca (58>44), Grecia (47>26), España (39>18), Francia (57>47), Irlanda (92>25), Italia (33>29), Países Bajos (67>49), Portugal (67>34), Reino Unido (81>31).

Exactamente **10 países** cumplen la condición (quedan excluidos Alemania y Austria).

2. Estimar la razón simplificada entre los países con propiedad superior al 50% que superan la media de la UE-15 de unifamiliares (52%) y los que no.

- Países con propietarios $> 50\%$: Todos excepto Alemania (11 países).
- De estos, superan el 52% de unifamiliares: Bélgica (77), Dinamarca (58), Francia (57), Irlanda (92), Países Bajos (67), Portugal (67), Reino Unido (81) $\rightarrow 7$ países.
- No superan: Grecia (47), España (39), Italia (33), Austria (45) $\rightarrow 4$ países.

La razón simplificada es **7:4**.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 14 (Población agrícola en Europa 2004) Partir de la matriz de trabajadores agrícolas:

Tabla 21: Cualificación de la población agrícola activa (en miles)

Categoría	Hombres 2004	Hombres 2005	Mujeres 2004	Mujeres 2005	Total 2004	Total 2005
Sin cualificación	1 400	1 200	1 400	1 300	2 800	2 500
Cualif. básica	3 500	3 500	700	900	4 200	4 400
Cualif. avanzada	1 700	1 600	1 000	1 100	2 700	2 700
Asalariados	5 100	5 000	1 800	1 900	6 900	6 900
Autónomos	1 500	1 300	1 300	1 400	2 800	2 700
TOTAL	6 600	6 300	3 100	3 300	9 700	9 600

En 2004, si los autónomos sin cualificación eran una quinta parte de los asalariados sin cualificación, y en 2005 una cuarta parte de los asalariados no tenía cualificación, habiendo 200 000 más asalariados no cualificados en 2005 que en 2004, ¿cuántos autónomos sin cualificación hubo en 2004?

Solución Paso a Paso:

- Asalariados sin cualificación en 2005 = $\frac{1}{4} \cdot 6\,900\,000 = 1\,725\,000$.
- Asalariados sin cualificación en 2004 = $1\,725\,000 - 200\,000 = 1\,525\,000$.
- Autónomos sin cualificación en 2004 = $\frac{1}{5} \cdot 1\,525\,000 = 305\,000$.

Hubo exactamente **305 000 autónomos sin cualificación en 2004**.

16. Repaso de Alojamiento e Inflación (21 de marzo de 2026)

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 15 (Fusión de países) Dados los indicadores medios por hogar:

Tabla 22 Indicadores de vivienda en los países A y B

Magnitud	País A	País B
Miembros promedio por familia	3	4
Habitaciones promedio por hogar	2.5	4
Superficie habitable promedio (m^2)	15	20

Si en el país A hay el doble de familias que en el B, y se fusionan para formar el país C, ¿cuántas habitaciones tendrá el hogar familiar medio?

Solución Paso a Paso:

- Proporción de familias: A = 2 partes, B = 1 parte.
- Total ponderado de habitaciones: $2 \cdot 2.5 + 1 \cdot 4 = 5 + 4 = 9$.
- Total de hogares: $2 + 1 = 3$.
- Promedio habitaciones/hogar:

$$\text{Promedio} = \frac{9}{3} = 3 \text{ habitaciones}$$

El hogar medio del nuevo país tendrá exactamente **3 habitaciones**.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 16 (Inflación y precio de vivienda) Tasa de inflación media (% anual) en el sector inmobiliario y bienes de consumo (2002):

Tabla 23: Tasas de inflación media y precios medios

País	Propiedad (% anual)	Bienes de consumo (% anual)	Precio medio 2000	Precio medio 2002
Francia	18%	3%	135 000	187 974
Bélgica	16%	2%	140 279	187 974
España	21%	4%	—	—

1. Si a finales de 2000 una propiedad costaba 135 000 € en Francia y 120 000 € en Bélgica. Si la inflación fue constante, ¿cuánto más costaba una propiedad en Francia que en Bélgica en 2002?

- Precio Francia 2002: $135\,000 \cdot 1.18 \cdot 1.18 = 187\,974$ €
- Precio Bélgica 2002: $120\,000 \cdot 1.16 \cdot 1.16 = 161\,472$ €
- Diferencia: $187\,974 - 161\,472 = 26\,502$ €.

Costaba en promedio **26 502 € más en Francia**.

2. Si a finales de 2000 el precio en España era el 80% de Francia, ¿qué porcentaje representaría a finales de 2002?

- Francia 2002: $S_{Fr} \cdot (1.18)^2 = S_{Fr} \cdot 1.3924$
- España 2002: $0.80 \cdot S_{Fr} \cdot (1.21)^2 = 0.80 \cdot S_{Fr} \cdot 1.4641 = 1.17128 \cdot S_{Fr}$
- Porcentaje: $\frac{1.17128}{1.3924} \cdot 100\% \approx 84.11\%$.

El precio español representará el **84.11%** del francés.

17. Actividad de Calificaciones y Sectores (3 de abril de 2026)

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 1 A partir de las calificaciones universitarias registradas:

Tabla 14: Calificaciones por universidades

Calificación	U. País Vasco	U. Madrid	U. Sevilla	U. Barcelona
Matrícula	2 000	500	1 000	3 000
Sobresaliente	3 000	500	1 000	500
Notable	7 000	3 000	8 000	9 000
Bien	9 000	12 000	10 000	7 000
Suficiente	7 000	9 000	10 000	1 000
Suspenso	2 000	2 000	500	500
TOTAL	30 000	27 000	30 500	21 000

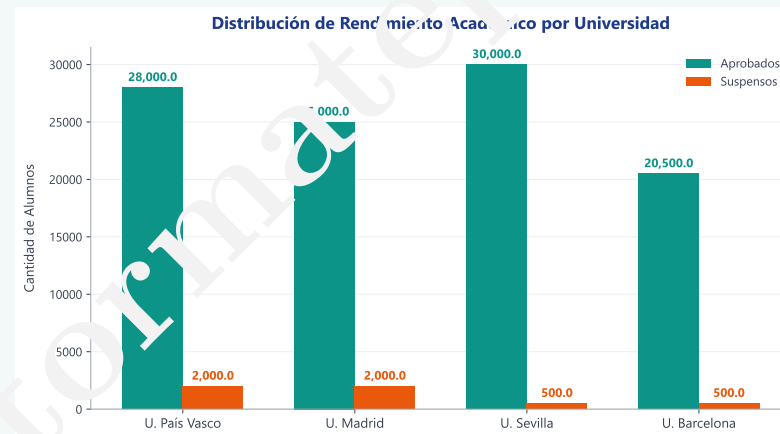


Figura 12: Distribución de rendimiento académico por universidad.

1. ¿En qué universidad la razón Aprobados:Suspensos es mayor?

- U. País Vasco: $28\,000/2\,000 = 14$
- U. Madrid: $25\,000/2\,000 = 12.5$
- U. Sevilla: $30\,000/500 = 60$
- U. Barcelona: $20\,000/500 = 41$

La mayor razón es en la **Universidad de Sevilla** con una proporción de **60:1**.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 10 (Sectores económicos masculinos 2009) Distribución porcentual:

Tabla 25: Distribución de población activa masculina (2009)

Sector	Chipre	Hungría	Bulgaria	Dinamarca	Austria
Primario	2%	4%	2%	5%	6%
Secundario	31%	25%	30%	27%	35%
Terciario	67%	71%	68%	68%	59%

1. Si la población activa masculina de Hungría y Bulgaria está en razón 2 : 3, ¿cuál es la razón de trabajadores del sector secundario de ambos?

$$\text{Razón} = \frac{0.25 \cdot 2x}{0.30 \cdot 3x} = \frac{0.50}{0.90} = \frac{5}{9} = 5 : 9$$

2. Si la de Chipre y Austria está en razón 3 : 5, ¿cuál es la razón de terciario de Chipre a secundario de Austria?

$$\text{Razón} = \frac{0.67 \cdot 3x}{0.35 \cdot 5x} = \frac{2.01}{1.75} = \frac{201}{175} = 201 : 175$$

18. Riesgo de Pobreza y Exclusión (15 de abril de 2026)

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio Único A partir de las tasas oficiales de riesgo de pobreza por grupos de edad:

Tabla 26: Tasa de riesgo de pobreza por sexo y edad en 2015

Grupo de edad	Mujeres (%)	Hombres (%)
Menores de 16 años	35.7%	35.1%
De 16 a 29 años	38.0%	37.3%
De 30 a 44 años	29.7%	28.6%
De 45 a 64 años	30.8%	31.2%
De 65 y más años	9.7%	10.5%

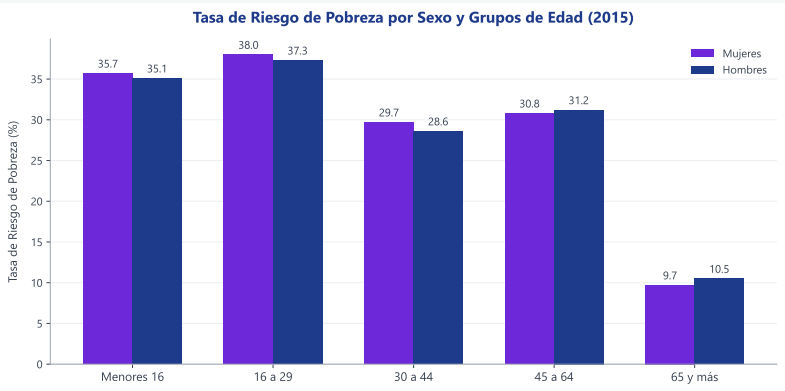


Figura 13: Tasa de riesgo de pobreza por sexo y grupos de edad en 2015.

1. La población femenina menor de 16 años pasó de 10.3 millones en 2010 a 8.7 millones en 2015. Si la tasa de riesgo en 2010 fue idéntica a la de 2015 (35.7%), ¿en qué porcentaje varió la cantidad absoluta de menores en riesgo?

- Menores en riesgo 2010: $10.3 \text{ M} \cdot 0.357 = 3.6771 \text{ M}$.

- Menores en riesgo 2015: $8.7 \text{ M} \cdot 0.357 = 3.1059 \text{ M}$.

- Variación:

$$\Delta\% = \frac{3.1059 - 3.6771}{3.6771} \cdot 100\% \approx -15.53\%$$

El número de menores en riesgo disminuyó un **15.53%**.

2. En 2015, en el tramo de 30 a 44 años (4.2 millones de personas), el 55% eran mujeres. Calcular la tasa de pobreza conjunta de este tramo.

- Mujeres: $4.2 \text{ M} \cdot 0.55 = 2.31 \text{ M}$, en riesgo = $2.31 \text{ M} \cdot 0.297 = 0.68607 \text{ M}$.

- Hombres: $4.2 \text{ M} \cdot 0.45 = 1.89 \text{ M}$, en riesgo = $1.89 \text{ M} \cdot 0.286 = 0.54054 \text{ M}$.

- En riesgo total = 1.22661 M .

- Tasa conjunta:

$$\text{Tasa} = \frac{1.22661}{4.2} \cdot 100\% = 29.205\% \approx 29.20\%$$

19. Práctica RVNE 110 (3 de mayo de 2023)

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 3 (Primer Tatuaje) Distribución de zonas corporales del primer tatuaje:

Tabla 27: Porcentaje de primer tatuaje por sexo y zona corporal

Parte del cuerpo	Mujeres (%)	Hombres (%)
Brazos	30.9%	50.6%
Espalda	23.5%	9.4%
Hombros	8.6%	10.7%
Pies	8.4%	5.1%
Pecho	5.0%	4.8%
Rostro	3.8%	0.0%
Muñeca	3.4%	1.6%
Tobillos	1.4%	0.2%
Abdomen	1.0%	6.7%
Cabeza	0.7%	2.8%
Otros	13.4%	8.1%

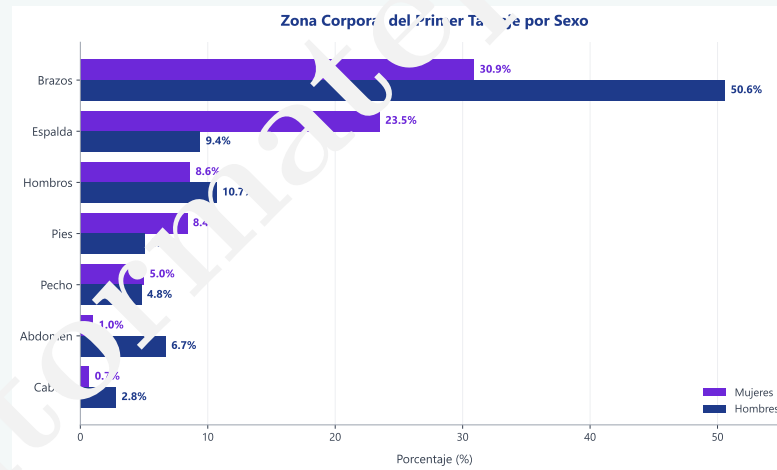


Figura 14: Distribución de la zona corporal del primer tatuaje por sexo.

1. Si los hombres tatuados son el triple de las mujeres, ¿cuál es la razón de hombres a mujeres cuyo primer tatuaje fue en el tobillo?

- Mujeres (tobillo): $1.4\% \cdot 1x = 0.014x$.
- Hombres (tobillo): $0.2\% \cdot 3x = 0.006x$.
- Razón:

$$\text{Razón} = \frac{\text{Hombres}_{\text{tob}}}{\text{Mujeres}_{\text{tob}}} = \frac{0.006x}{0.014x} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} = 3 : 7$$

2. Si por cada 5 personas tatuadas 2 son mujeres y 3 hombres, ¿qué porcentaje de la población total tiene su primer tatuaje en brazos o espalda?

- Proporción de brazos o espalda: Mujeres = $30.9\% + 23.5\% = 54.4\%$; Hombres = $50.6\% + 9.4\% = 60.0\%$.
- Ponderación:

$$\%_{\text{conjunto}} = 54.4\% \cdot 0.40 + 60.0\% \cdot 0.60 = 21.76\% + 36.00\% = 57.76\%$$

Aproximadamente el **57.76%** de la población total.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 7 (Solicitudes de patentes 2013) Datos de patentes en Europa:

Tabla 28: Patentes solicitadas por millón y totales en 2013

País	Patentes por millón	Patentes totales	Población calculada (millones)
Austria	146.2	1238	8.478
Bulgaria	128.1	930	7.260
Dinamarca	342.7	1924	5.614
Eslovenia	198.6	409	2.059
Irlanda	264.8	1217	4.596

1. ¿En cuántos habitantes supera la población de Dinamarca a la de Irlanda?

$$\Delta P = 5.614 \text{ M} - 4.596 \text{ M} = 1.018 \text{ millones de habitantes}$$

2. Si se consideran como un único país Austria y Eslovenia, ¿cuál sería su tasa conjunta de patentes?

$$\text{Tasa conjunta} = \frac{1238 + 409}{8.478 \text{ M} + 2.059 \text{ M}} = \frac{1647}{10.537 \text{ M}} \approx 156.3 \text{ por millón}$$

20. Empresas del Sector TIC (16 de mayo de 2026)

En esta sesión se analiza la evolución demográfica de empresas del sector de las nuevas tecnologías (TIC) en cinco países europeos: Italia, Croacia, Reino Unido, Lituania y Noruega. Se evalúan crecimientos porcentuales interanuales y repartos de población bajo hipótesis específicas.

Cálculo de Crecimiento Constante y Redistribución Proporcional

Si una magnitud crece con una tasa constante r en dos periodos consecutivos, se cumple:

$$X_t = X_{t-1} \cdot (1 + r) \implies X_{t-1} = \frac{X_t}{1 + r}$$

Para redistribuir un total de empresas T en una proporción dada $a : b : c$, el total de partes es $S = a + b + c$, y las cantidades correspondientes son:

$$X_a = \frac{a}{S} \cdot T, \quad X_b = \frac{b}{S} \cdot T, \quad X_c = \frac{c}{S} \cdot T$$

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio Único A partir de los datos históricos del número de empresas del sector TIC (en miles):

Tabla 29: Empresas del sector de las TIC en miles (2013-2015)

País	2011	2013	2015
Italia	–	80,0	97,0
Croacia	–	7,0	9,0
Reino Unido	–	120,0	140,0
Lituania	–	2,5	3,0
Noruega	–	10,0	13,0
TOTAL	x	219,5	262,0

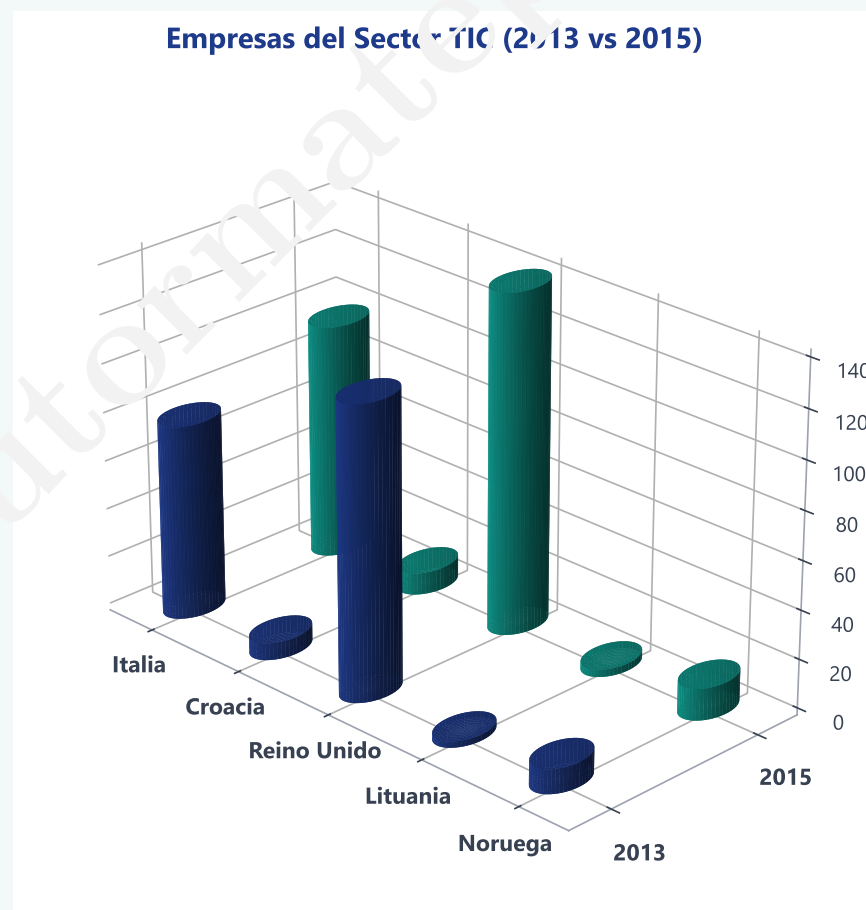


Figura 15: Distribución tridimensional del número de empresas del sector TIC (2013 vs 2015).

Preguntas y Resoluciones:

1. **Inciso 1** El número de empresas del sector de las TIC aumentó el mismo porcentaje en el conjunto de los 5 países en el periodo 2013-2015 y en el 2011-2013. ¿Cuántas empresas del sector de las TIC había en el conjunto de estos 5 países en 2011?

Solución Paso a Paso:

- **Tasa de crecimiento global 2013-2015:**

$$r = \frac{\text{Total}_{2015} - \text{Total}_{2013}}{\text{Total}_{2013}} = \frac{262.0 - 219.5}{219.5} = \frac{42.5}{219.5} \approx 0.19362 = 19.36\%$$

- **Cálculo del total de empresas en 2011 (x).** Como el crecimiento es el mismo en el periodo 2011-2013:

$$x \cdot (1 + r) = 219.5 \Rightarrow x \cdot 1.19362 = 219.5 \Rightarrow x = \frac{219.5}{1.19362} \approx 183.89 \text{ miles}$$

En 2011 había aproximadamente **183.89 miles** (es decir, 183 890) empresas TIC en los cinco países.

2. Inciso 2 En 2015 ¿en cuántos miles de empresas habría que aumentar conjuntamente a Croacia, Lituania y Noruega para que Italia y Reino Unido pasaran a representar exactamente el 65% del nuevo total, manteniéndose Italia y Reino Unido sin cambios?

Solución Paso a Paso

- **Suma constante de Italia y Reino Unido en 2015:** $97.0 + 140.0 = 237.0$ miles.
- **Nuevo total del conjunto (T_{nuevo}):** Queremos que 237.0 miles represente el 65% del nuevo total:

$$0.65 \cdot T_{\text{nuevo}} = 237.0 \Rightarrow T_{\text{nuevo}} = \frac{237.0}{0.65} \approx 364.615 \text{ miles}$$

- **Nuevo total para el resto de países (Croacia, Lituania y Noruega):**

$$\text{Resto}_{\text{nuevo}} = T_{\text{nuevo}} \cdot 0.35 = 364.615 \cdot 0.35 \approx 127.615 \text{ miles}$$

- **Total inicial del resto de países en 2015:** $9.0 + 3.0 + 13.0 = 25.0$ miles.
- **Aumento requerido (y):**

$$y = 127.615 - 25.0 = 102.615 \text{ miles}$$

Se requiere un incremento conjunto de **102.61 miles** de empresas.

3. **Inciso 3** Entre 2013 y 2015, ¿en qué país fue mayor el crecimiento porcentual del número de empresas TIC? Da el nombre del país y el porcentaje aproximado.

Solución Paso a Paso:

- Italia: $\frac{97-80}{80} \cdot 100\% = 21.25\%$
- Croacia: $\frac{9-7}{7} \cdot 100\% \approx 28.57\%$
- Reino Unido: $\frac{140-120}{120} \cdot 100\% \approx 16.67\%$
- Lituania: $\frac{3-2.5}{2.5} \cdot 100\% = 20.00\%$
- **Noruega:** $\frac{13-10}{10} \cdot 100\% = 30.00\%$

El mayor crecimiento porcentual corresponde a **Noruega** con un **30%**.

4. **Inciso 4** Supón que en 2015 el conjunto formado por Croacia, Lituania y Noruega se divide internamente en la proporción de empresas TIC: Croacia : Lituania : Noruega = 3 : 1 : 4, manteniendo el mismo total conjunto real de 2015. ¿Cuántas miles de empresas TIC corresponderían a Lituania en esa redistribución hipotética?

Solución Paso a Paso:

- **Total a redistribuir:** $9.0 + 3.0 + 13.0 = 25.0$ miles.
- **Suma de las partes de la proporción:** $3 + 1 + 4 = 8$ partes.
- **Porción de Lituania** (1 parte de 8):

$$\text{Lituania}_{\text{hipot}} = \frac{1}{8} \cdot 25.0 = 3.125 \text{ miles}$$

Corresponderían exactamente **3.125 miles** (es decir, 3125) empresas TIC a Lituania.

21. Cobertura de la Demanda Eléctrica (24 de mayo de 2026)

En esta sesión se analiza la estructura de la cobertura de la demanda eléctrica en una red, basándose en la participación porcentual de distintas fuentes de generación y en el cálculo de indicadores de dependencia de combustibles fósiles.

Cálculo de Participaciones e Índice de Dependencia

Dada una demanda total D y los porcentajes de generación p_i por fuente, la cantidad generada por la fuente i es:

$$C_i = \frac{p_i}{100} \cdot D$$

El índice de dependencia fósil se define como la razón entre la energía procedente de fuentes térmicas fósiles convencionales y la procedente de fuentes no emisoras de base (nuclear e hidráulica):

$$\text{Índice de dependencia fósil} = \frac{\text{Ciclo combinado} + \text{Carbón}}{\text{Nuclear} + \text{Hidráulica}}$$

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio Único A partir de los datos de cobertura de una demanda total de **39 963 MWh**:

Tabla 30: Cobertura de la demanda eléctrica por fuente de energía

Fuente de energía	Porcentaje (%)	Cantidad en MWh
Ciclo combinado	9,4%	$0.094 \cdot 39963 = 3756.522$
Carbón	20,1%	$0.201 \cdot 39963 = 8032.563$
Nuclear	17,8%	$0.178 \cdot 39963 = 7113.414$
Hidráulica	17,3%	$0.173 \cdot 39963 = 6913.599$
Solar fotovoltaica	0,9%	$0.009 \cdot 39963 = 359.667$
Eólica	21,9%	$0.0219 \cdot 39963 = 8751.897$
Cogeneración y resto	11,8%	$0.118 \cdot 39963 = 4715.634$
Solar termoeléctrica	0,8%	$0.008 \cdot 39963 = 319.704$
TOTAL	100,0%	39 963.000

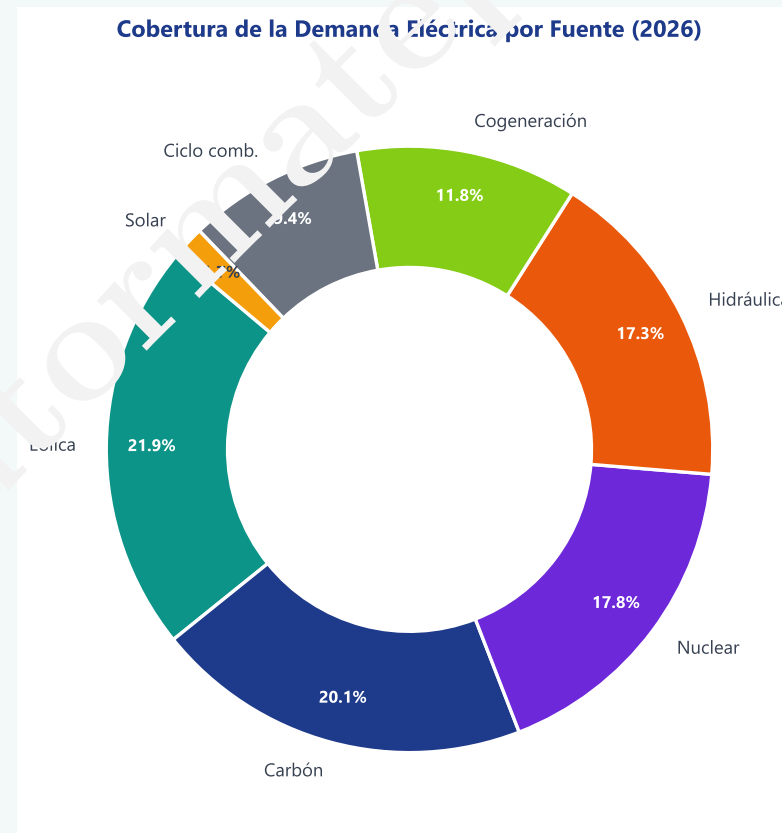


Figura 16: Distribución porcentual de la cobertura de la demanda eléctrica.

Preguntas y Resoluciones:

- a) **Inciso a** ¿Cuántos MWh más deberían proceder de la energía solar para alcanzar la cantidad generada por energía hidráulica?

Solución Paso a Paso:

- Cantidad de energía hidráulica: 6913.599 MWh (17.3% de la demanda).

- Cantidad de energía solar total (fotovoltaica + termoeléctrica):

$$C_{\text{solar}} = (0.9\% + 0.8\%) \cdot 39963 = 1.7\% \cdot 39963 = 679.371 \text{ MWh}$$

- Diferencia requerida:

$$\Delta C = C_{\text{hidroeléctrica}} - C_{\text{solar}} = 6913.599 - 679.371 = 6234.228 \text{ MWh}$$

Deberían proceder **6234.23 MWh** adicionales de energía solar.

- b) **Inciso b** Si se agrupan ciclo combinado y carbón como fuentes térmicas convencionales, ¿qué razón simplificada hay entre la energía procedente de fuentes térmicas convencionales y la procedente de fuentes solares?

Solución Paso a Paso:

- Porcentaje de fuentes térmicas convencionales: $9.4\% + 20.1\% = 29.5\%$.
- Porcentaje de fuentes solares: $0.9\% + 0.8\% = 1.7\%$.
- Razón entre convencionales y solares:

$$\text{Razón} = 29.5 : 1.7 = 295 : 17$$

Por cada 17 partes de energía solar hay **295 partes** de fuentes térmicas convencionales (razón simplificada $\boxed{295 : 17}$).

- c) **Inciso c** Si se quisiera que la energía eólica pasara a representar exactamente el 25% de la demanda total, manteniéndose constante la demanda total de 39963 MWh, ¿cuántos MWh adicionales tendría que aportar la energía eólica?

Solución Paso a Paso:

- Incremento de porcentaje requerido: $25\% - 21.9\% = 3.1\%$.
- MWh adicionales:

$$\text{Adicional}_{\text{eólica}} = 3.1\% \cdot 39963 = 0.031 \cdot 39963 = 1238.853 \text{ MWh}$$

La energía eólica tendría que aportar **1238.85 MWh** adicionales.

d) **Inciso d** Se define el índice de dependencia fósil como:

$$\text{Índice de dependencia fósil} = \frac{\text{Ciclo combinado} + \text{Carbón}}{\text{Nuclear} + \text{Hidráulica}}$$

Calcular el valor de este índice.

Solución Paso a Paso:

- Suma de ciclo combinado y carbón: $9.4\% + 20.1\% = 29.5\%$.
- Suma de nuclear e hidráulica: $17.8\% + 17.3\% = 35.1\%$.
- Índice de dependencia fósil:

$$\text{Índice} = \frac{29.5\%}{35.1\%} \approx 0.84046 \approx 0.84$$

El índice de dependencia fósil es de **0.84** (la energía fósil equivale al 84% de la generación nuclear e hidráulica combinadas).