

Curso Completo de Matemáticas y Guía de Estudio

Sistemas de ecuaciones, determinantes, geometría
analítica tridimensional, métrica del espacio,
probabilidades y optimización

Preparado especialmente para:

Estudiante de Bachillerato

Idea visual clave / Intuición

Idea central de esta guía:

Las matemáticas conectan el análisis abstracto con la intuición física. A través de este documento, resolveremos paso a paso cada uno de los ejercicios del curso. Combinaremos el análisis matricial, el producto vectorial, el cálculo infinitesimal y los conceptos de probabilidad con interpretaciones gráficas tridimensionales muy cuidadas para lograr un dominio intuitivo y profesional de la materia.

Índice

1. Sistemas de Ecuaciones Lineales y Determinantes	3
1.1. Resolución de Sistemas por la Regla de Cramer	3
1.2. Estudio de un Sistema Incompatible	6
1.3. Estudio de Sistemas Compatibles Indeterminados	8
1.4. Aplicación de Sistemas a la Asignación y Costos de Terrenos	10
2. Geometría Analítica en el Espacio: Rectas y Planos	12
2.1. Reducción de SEL a la Ecuación del Plano	12
2.2. Análisis de Inconsistencia en la Pertenencia a una Recta	14
2.3. Plano determinado por Dos Puntos y un Vector Orientador	14
2.4. Rectas y Planos Ortogonales en el Espacio	16
2.5. Intersección de Rectas y Planos con Ejes Coordinados	17
2.6. Alineación de Puntos en el Espacio	19
2.7. Planos determinados por Rectas y Puntos	21
3. Métrica en el Espacio: Distancias y Triángulos	24
3.1. Comprobación de Ortogonalidad y Teorema de Pitágoras	24
3.2. Minimización de la Distancia en función de un Parámetro	26
3.3. Propiedades de la Mediana y el Baricentro	27
3.4. Puntos de División en Razón Dada	29
4. Teoría de Probabilidades y Sucesos	30
4.1. Experimento Aleatorio del Dado y Sucesos Colectivos	30
4.2. Probabilidad Condicional en una Población	32
5. Optimización de Volúmenes (Repaso General)	33
5.1. Maximización del Volumen de un Depósito Cilíndrico	33
6. Matrices y Álgebra Lineal: Repaso de Selectividad	35
6.1. Cálculo de Inversas mediante Identidades Matriciales	35

1. Sistemas de Ecuaciones Lineales y Determinantes

En este bloque se aborda la clasificación y resolución de sistemas de ecuaciones lineales (SEL) utilizando la teoría de rangos (Teorema de Rouché-Frobenius), determinantes, la regla de Cramer y la reducción por Gauss-Jordan.

El Teorema de Rouché-Frobenius y Cramer

Dado un sistema $Ax = b$ con n variables, donde A es la matriz de coeficientes y A^* es la matriz ampliada:

1. **Sistema Compatible Determinado (SCD):** Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = n$. Existe una única solución. Si A es cuadrada e invertible ($\det(A) \neq 0$), podemos aplicar la **Regla de Cramer**:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

donde A_i es la matriz que resulta de reemplazar la columna i -ésima de A por el vector de términos independientes b .

2. **Sistema Compatible Indeterminado (SCI):** Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) < n$. Existen infinitas soluciones. Los grados de libertad representan el número de variables libres: $gl = n - \text{rango}(A)$.
3. **Sistema Incompatible (SI):** Si $\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A^*)$. El sistema no tiene solución.

1.1. Resolución de Sistemas por la Regla de Cramer

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 1 Hallar la solución del sistema:

$$\begin{cases} x - y + z = 7 \\ x + y - z = 3 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

Solución Paso a Paso: Reescribimos el sistema en forma matricial:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculamos el determinante de A :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= [1(1) - (-1)(1) + 1(-1)] - [-1(1) + 1(-1) + 1(1)] \\ &= 1 - (-3) = 4\end{aligned}$$

Como $\det(A) = 4 \neq 0$, el rango de A es 3. El sistema es SCD.

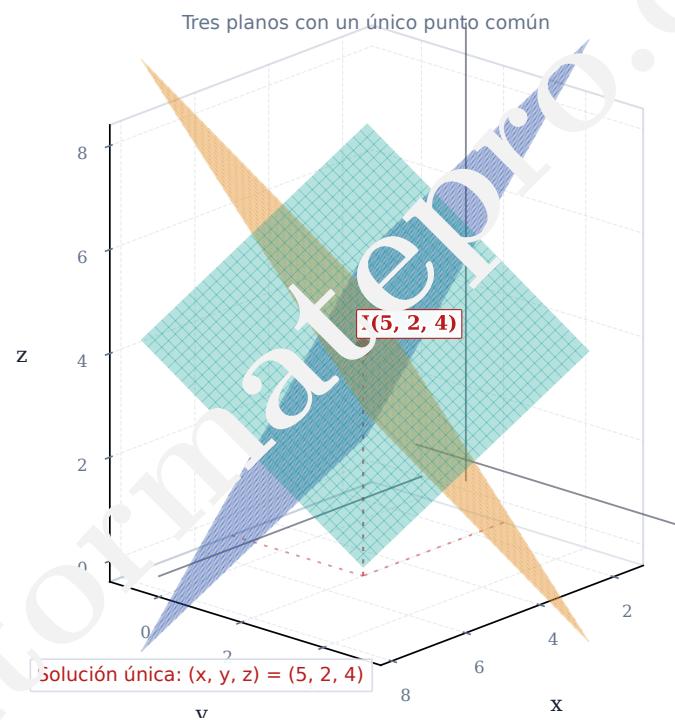
2. Aplicamos la regla de Cramer para cada variable:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{20}{4} = 5$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{8}{4} = 2$$

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{16}{4} = 4$$

La solución única del sistema es $(x, y, z) = (5, 2, 4)$.

Sistema compatible determinado

Figur. 1: Representación gráfica del sistema compatible determinado. Se muestran tres planos que se intersectan en un único punto común $I(5, 2, 4)$.

1.2. Estudio de un Sistema Incompatible

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 2 Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y - 4z = 1 \\ x + 3y - 5z = 4 \end{cases}$$

Solución Paso a Paso: Planteamos la matriz de coeficientes A y la ampliada A^* :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

1. **Calculamos el rango de A :** Intercambiamos la fila 1 y 3 y realizamos eliminación de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1}]{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -7 & 11 \\ 0 & -7 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El determinante es nulo y la matriz reducida tiene solo dos filas no nulas. Por tanto, $\text{rango}(A) = 2$.

2. **Calculamos el rango de A^* :** Extraemos una submatriz de 3×3 combinando las columnas de y , z y la de términos independientes:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \implies \det(M) = 10 \neq 0$$

Como existe un menor de 3×3 con determinante no nulo, el $\text{rango}(A^*) = 3$. Dado que $\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A^*)$ ($2 \neq 3$), el sistema es **Incompatible** (no tiene solución).

Sistema incompatible

Los cortes por parejas no concurren en un único punto

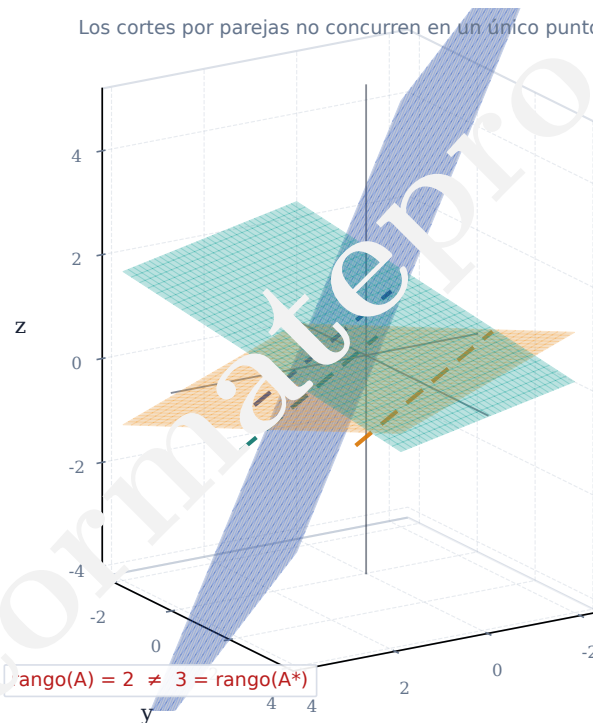


Figura 2: Representación en 3D de tres planos sin intersección común. Se puede ver cómo los planos no comparten ningún punto en común en el espacio, formando una configuración incompatible.

1.3. Estudio de Sistemas Compatibles Indeterminados

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 3 Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + 3z = 8 \end{cases}$$

Solución: La matriz ampliada es:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Realizando operaciones fila:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1}]{F_2 \rightarrow F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los rangos coinciden: $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < 3$. Es un SCI con $3 - 2 = 1$ grado de libertad.

- De la segunda ecuación: $-2y = -4 \implies y = 2$.
- De la primera ecuación: $x + 2 + z = 6 \implies x = 4 - z$.

Definiendo $z = t$ ($t \in \mathbb{R}$) como variable libre, las soluciones son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - t \\ 2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geométricamente, el conjunto de infinitas soluciones describe la recta que pasa por $(4, 2, 0)$ con dirección $(-1, 0, 1)$.

Sistema compatible indeterminado

Una recta completa de soluciones: $(x,y,z) = (4,2,0) + t(-1,0,-2)$

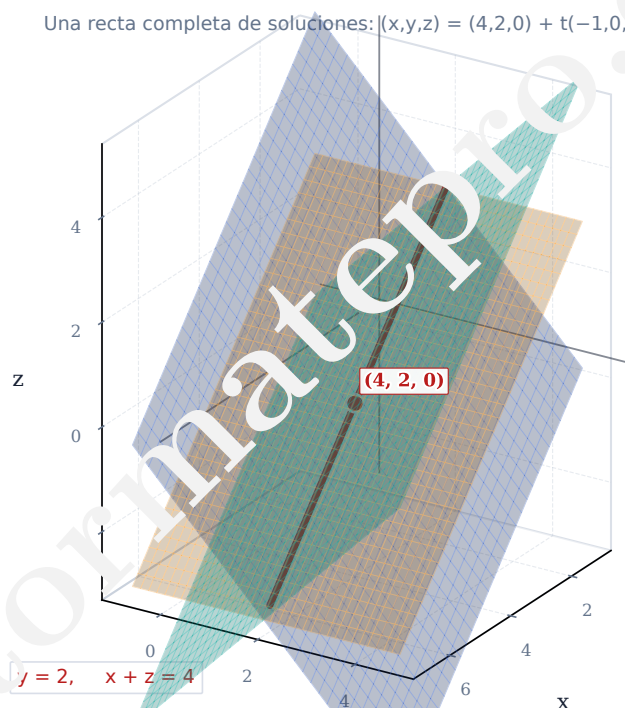


Figura 3: Planos correspondientes al sistema compatible indeterminado. La intersección de los tres planos forma una línea recta roja en el espacio, que representa el conjunto de infinitas soluciones.

1.4. Aplicación de Sistemas a la Asignación y Costos de Terrenos

Ejercicio 4 (Ej. 33) Se desea calcular las áreas de tres parcelas de cultivo (x, y, z en m^2) conociendo que:

1. El área total entre las tres parcelas es de 1870 m^2 .
2. La tasación total (costo de adecuación del suelo) es de 3,360,000 €, con valores por m^2 de 1500 € en la parcela 1, 1800 € en la parcela 2, y 2000 € en la parcela 3.
3. La adecuación de la parcela 3 equivale a las tres cuartas partes del valor conjunto de la primera y segunda parcela.

Definimos las variables del problema:

- x : Área de la parcela 1 (m^2)
- y : Área de la parcela 2 (m^2)
- z : Área de la parcela 3 (m^2)

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Solución Paso a Paso:

Planteamos el sistema de ecuaciones a partir del enunciado:

$$\begin{cases} x + y + z = 1870 \\ 1500x + 1800y + 2000z = 3360000 \\ 2000z = \frac{3}{4}(1500x + 1800y) \end{cases}$$

Dividimos la segunda ecuación por 100 y reordenamos la tercera:

$$2000z = \frac{4500}{4}x + \frac{5400}{4}y = 1125x + 1350y \implies -1125x - 1350y + 2000z = 0$$

Dividiendo esta última por 25 para simplificar los números:

$$-45x - 54y + 80z = 0$$

El sistema simplificado a resolver es:

$$\begin{cases} x + y + z = 1870 \\ 15x + 18y + 20z = 33600 \\ -45x - 54y + 80z = 0 \end{cases}$$

Planteamos la matriz aumentada y aplicamos la reducción:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1870 \\ 15 & 18 & 20 & 33600 \\ -45 & -54 & 80 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2 \rightarrow F_2 - 15F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 + 45F_1}]{F_2 \rightarrow F_2 - 15F_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1870 \\ 0 & 3 & 5 & 5550 \\ 0 & -9 & 125 & 84150 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + 3F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1870 \\ 0 & 3 & 5 & 5550 \\ 0 & 0 & 140 & 100800 \end{pmatrix}$$

- De la tercera fila: $140z = 100800 \implies z = 720 \text{ m}^2$.
- De la segunda fila: $3y + 5(720) = 5550 \implies 3y + 3600 = 5550 \implies y = 650 \text{ m}^2$.
- De la primera fila: $x + 650 + 720 = 1870 \implies x = 500 \text{ m}^2$.

Conclusión: Las áreas de las parcelas son: $x = 500 \text{ m}^2$, $y = 650 \text{ m}^2$, y $z = 720 \text{ m}^2$.

2. Geometría Analítica en el Espacio: Rectas y Planos

Esta sección aborda la modelización de rectas y planos en el espacio real tridimensional ($\mathbb{R}^3$), las relaciones de ortogonalidad, coplanaridad y alineación de puntos.

2.1. Reducción de SEL a la Ecuación del Plano

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 1 Estudiar el sistema y caracterizar geoméricamente su solución:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 6 \\ -3x - 6y + 3z = -9 \end{cases}$$

Solución: Dado que las ecuaciones 2 y 3 son múltiplos exactos de la primera ($F_2 = 2F_1$ y $F_3 = -3F_1$), el sistema se reduce a una única ecuación independiente:

$$\pi : x + 2y - z = 3$$

Geoméricamente representa un **plano en el espacio** con vector normal $\vec{n} = (1, 2, -1)$.

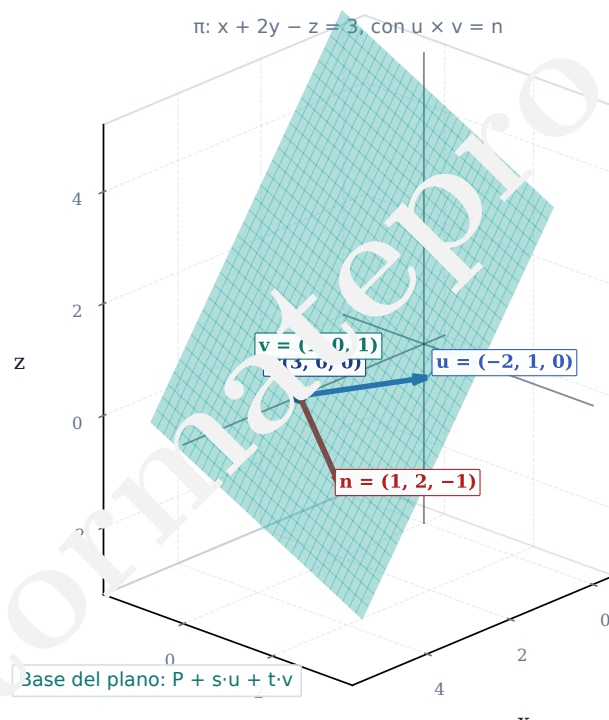
Para obtener sus vectores directores de la base, elegimos dos variables libres $y = s, z = t$:

$$x = -2s + t + 3 \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los vectores directores son $\vec{u} = (-2, 1, 0)$ y $\vec{v} = (1, 0, 1)$. El producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ comprueba el vector normal:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} = (1, 2, -1) = \vec{n}$$

Plano generado por dos direcciones



Figur. 4: Plano $\pi: x + 2y - z = 3$ en el espacio. Se representan el punto de partida $P(3, 0, 0)$, los vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la base del plano, y el vector perpendicular $\vec{n}$.

2.2. Análisis de Inconsistencia en la Pertenencia a una Recta

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 2 Determinar el valor del parámetro x para que el punto $P(2, a, 5)$ pertenezca a la recta r dada por:

$$r : \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 7 - 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

Solución Paso a Paso: Para que el punto pertenezca a la recta, debe existir un único parámetro λ común que satisfaga las tres ecuaciones al sustituir las coordenadas de P :

- De la primera coordenada: $2 = 4 + \lambda \implies \lambda = -2$.
- De la tercera coordenada: $5 = 3 - \lambda \implies \lambda = -2$.

Sustituimos $\lambda = -2$ en la ecuación de la segunda coordenada para obtener a :

$$a = 7 - 2(-2) \implies a = 11$$

Para que la pertenencia sea geoméricamente factible, el parámetro debe valer $a = 11$.

Las ecuaciones continuas de la recta (despejando λ en cada término) son:

$$\frac{x - 4}{1} = \frac{y - 7}{-2} = \frac{z - 3}{-1}$$

2.3. Plano determinado por Dos Puntos y un Vector Orientador

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 3 Encuentra la ecuación general del plano π que tiene a $\vec{u} = (2, -2, 5)$ como vector director (orientador) y pasa por los puntos $P(0, -2, 3)$ y $Q(1, 1, 4)$.

Solución: Como el plano contiene los puntos P y Q , el vector que los une está en el plano y nos sirve como segundo vector director:

$$\vec{v} = \vec{PQ} = Q - P = (1 - 0, 1 - (-2), 4 - 3) = (1, 3, 1)$$

Con los vectores directores $\vec{u} = (2, -2, 5)$ y $\vec{v} = (1, 3, 1)$, hallamos el vector normal $\vec{n}$ haciendo su producto vectorial:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-2 - 15) - \vec{j}(2 - 5) + \vec{k}(6 - (-2)) = -17\vec{i} + 3\vec{j} + 8\vec{k}$$

Por tanto, el vector normal es $\vec{n} = (-17, 3, 8)$. Planteamos la ecuación general del plano con el punto $P(0, -2, 3)$:

$$-17(x - 0) + 3(y - (-2)) + 8(z - 3) = 0 \implies -17x + 3y + 6 + 8z - 24 = 0$$

La ecuación general buscada es $\boxed{-17x + 3y + 8z - 18 = 0}$.

2.4. Rectas y Planos Ortogonales en el Espacio

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 19 ¿Cuáles son las ecuaciones continuas de la recta r que pasa por el punto $A(1, 0, 3)$ y es perpendicular al plano π determinado por los vectores directores $\vec{u} = (-1, 3, 2)$ y $\vec{v} = (2, 1, 0)$?

Solución: Al ser la recta r perpendicular al plano π , el vector director de la recta $\vec{d}_r$ debe ser paralelo al vector normal del plano $\vec{n}_\pi$. 1. **Calculamos el vector normal $\vec{n}_\pi$:**

$$\vec{n}_\pi = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0 - 2) - \vec{j}(0 - 4) + \vec{k}(-1 - 6) = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k}$$

Así, el vector normal es $\vec{n}_\pi = (-2, 4, -7)$.

2. **Construimos las ecuaciones continuas de r con el punto $A(1, 0, 3)$:**

$$\frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 0}{4} = \frac{z - 3}{-7}$$

Recta perpendicular a un plano

La dirección de la recta coincide con la normal del plano

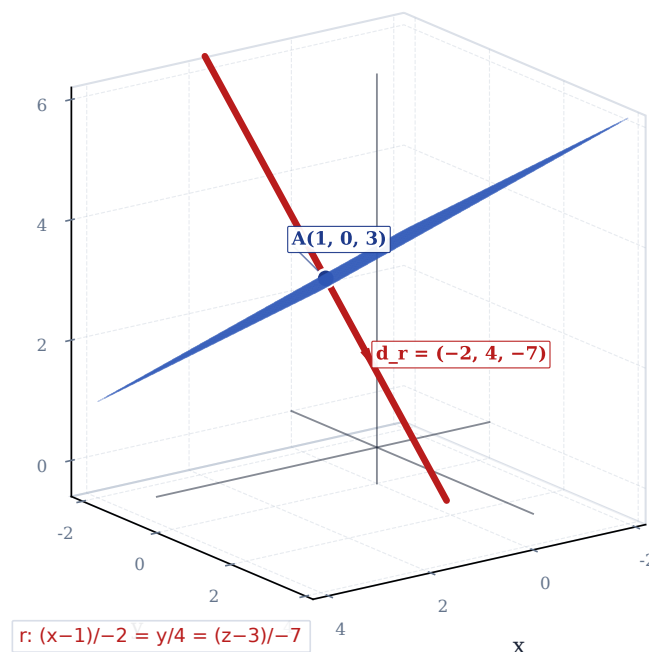


Figura 5: Recta r perpendicular al plano π . El vector director de la recta coincide con la normal del plano $\vec{n} = (-2, 4, -7)$.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 20 Sea la recta $r : (x, y, z) = (5, 0, 2) + k(1, 1, -2)$ y los puntos $P(1, 0, -1)$ y $Q(2, 1, 1)$. Determinar la ecuación paramétrica de la recta ℓ que pasa por Q y es perpendicular al plano π determinado por la recta r y el punto P .

Solución Paso a Paso: 1. El plano π está definido por la dirección de la recta r , $\vec{v}_r = (1, 1, -2)$, y por el vector que une un punto de la recta con el punto exterior P . Tomando el punto $A(5, 0, 2)$ de la recta r , el vector es:

$$\vec{u} = A - P = (5, 0, 2) - (1, 0, -1) = (4, 0, 3)$$

2. El vector normal del plano π se calcula mediante el producto vectorial de los vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}_r$:

$$\vec{n}_\pi = \vec{u} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-3, 11, 4)$$

3. Como la recta ℓ es perpendicular a π , su dirección es $\vec{d}_\ell = \vec{n}_\pi = (-3, 11, 4)$. Construimos la ecuación paramétrica de la recta que pasa por $Q(2, 1, 1)$:

$$\ell : \begin{cases} x = 2 - 3k \\ y = 1 + 11k \\ z = 1 + 4k \end{cases}$$

2.5. Intersección de Rectas y Planos con Ejes Coordinados**Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio**

Ejercicio 33 Encuentra la ecuación de la recta r contenida en el plano $\pi : x + 2y + 6z - 2 = 0$ que corta a los ejes de coordenadas OY y OZ .

Solución Paso a Paso: 1. **Corte con el eje OY (eje y):** Los puntos sobre el eje OY tienen coordenadas $(0, y, 0)$. Sustituimos en el plano:

$$0 + 2y + 6(0) - 2 = 0 \implies 2y = 2 \implies y = 1 \implies A(0, 1, 0)$$

2. **Corte con el eje OZ (eje z):** Los puntos sobre el eje OZ tienen la forma $(0, 0, z)$. Sustituimos en el plano:

$$0 + 2(0) + 6z - 2 = 0 \implies 6z = 2 \implies z = \frac{1}{3} \implies B(0, 0, 1/3)$$

3. **Vector director y ecuación de la recta:** El vector director es $\vec{AB} = B - A = (0, -1, 1/3)$. Escalamos multiplicando por 3 para trabajar con enteros:

$$\vec{d}_r = (0, -3, 1)$$

Usamos el punto $A(0, 1, 0)$ como punto de arranque:

$$r : (x, y, z) = (0, 1, 0) + k(0, -3, 1) \implies r : \begin{cases} x = 0 \\ \frac{y-1}{-3} = z \end{cases}$$

Recta determinada por dos cortes con los ejes

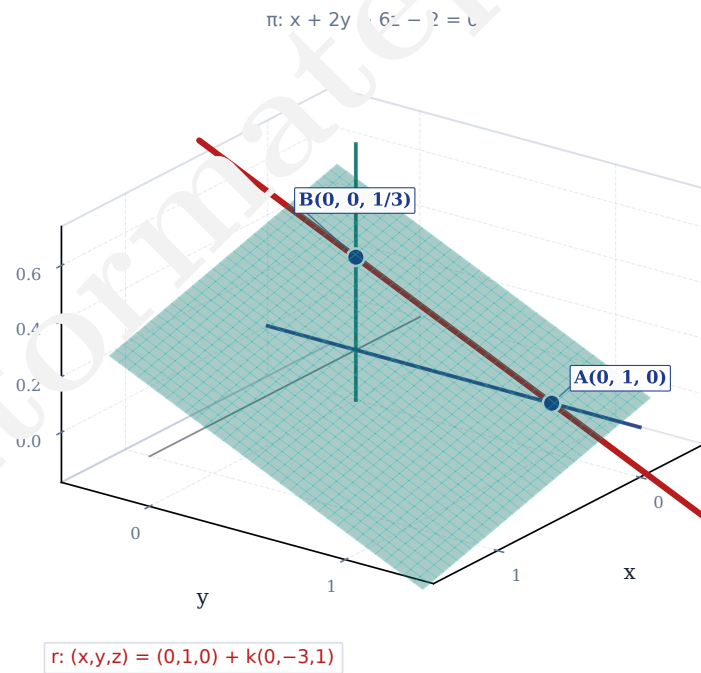


Figura 6: Recta contenida en el plano $\pi : x + 2y + 6z - 2 = 0$. Se muestran las intersecciones exactas con el eje OY en $A(0, 1, 0)$ y el eje OZ en $B(0, 0, 1/3)$.

2.6. Alineación de Puntos en el Espacio

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 34 Considera los puntos del espacio $P(-1, 2, 3)$, $Q(0, a-2, 1-a)$ y $R(2, -1, 6-6a)$. 1. Encuentra el valor de a para que estén alineados (colineales). 2. Obtener la ecuación de la recta que los contiene.

Solución Paso a Paso: 1. Los puntos están alineados si los vectores $\vec{PQ}$ y $\vec{QR}$ son proporcionales ($\vec{QR} = k \cdot \vec{PQ}$):

$$\vec{PQ} = Q - P = (1, -1, -2-a), \quad \vec{QR} = R - Q = (2, -a+1, 5-5a)$$

Planteamos la proporcionalidad componente a componente:

$$\frac{2}{1} = \frac{-a+1}{-1} = \frac{5-5a}{-2-a}$$

- De la primera igualdad: $2 = a-1 \implies a = 3$. - Comprobamos en la tercera componente con $a = 3$:

$$\frac{5-5(3)}{-2-3} = \frac{-10}{-5} = 2$$

Como la proporción es constante, los puntos están alineados cuando $a = 3$.

2. Reemplazando $a = 3$: $P(-1, 2, 3)$, $Q(0, 1, -2)$, y el vector director es $\vec{d} = \vec{PQ} = (1, -1, -5)$. La recta en forma vectorial es:

$$(x, y, z) = (-1, 2, 3) + k(1, -1, -5)$$

Alineación de tres puntos

Para $a = 3$, los tres puntos caen en una misma recta

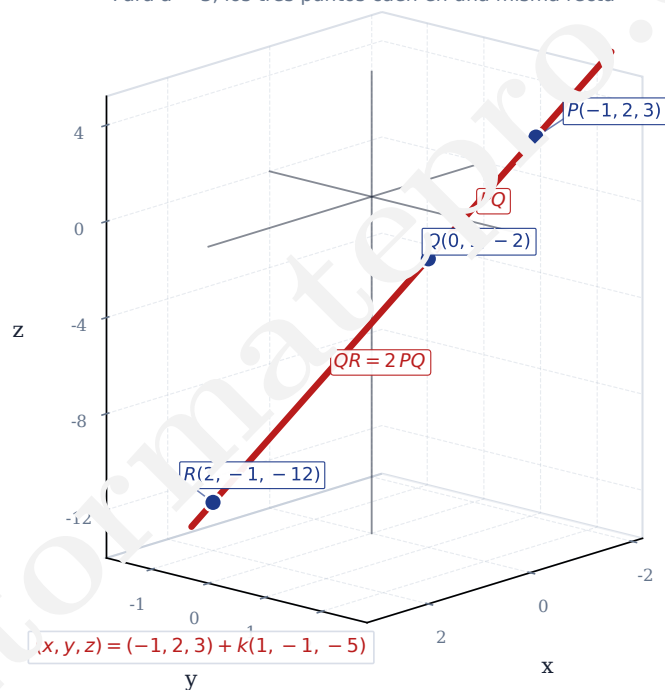


Figura 7: Tres puntos colineales en el espacio tridimensional para $a = 3$. La recta roja contiene a los puntos P , Q y R .

2.7. Planos determinados por Rectas y Puntos

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 11 Encuentra la ecuación del plano que pasa por $P(-4, -2, 3)$ y contiene la recta $r : (x, y, z) = (1, -2, -2) + \lambda(2, 1, 2)$.

Solución Paso a Paso: El plano está determinado por el punto de la recta $A(1, -2, -2)$, su vector director $\vec{v} = (2, 1, 2)$ y el vector de conexión desde P hasta A :

$$\vec{u} = A - P = (1 - (-4), -2 - (-2), -2 - 3) = (5, 0, -5)$$

El vector normal del plano $\vec{n}$ es el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(5) - \vec{j}(10 - (-10)) + \vec{k}(5) = (5, -20, 5)$$

Podemos simplificar dividiendo por 5: $\vec{n} = (1, -4, 1)$. Planteamos la ecuación general del plano usando el punto $P(-4, -2, 3)$:

$$1(x + 4) - 4(y + 2) + 1(z - 3) = 0 \implies x - 4y + z - 7 = 0$$

La ecuación del plano es $x - 4y + z = 7$.

Plano determinado por una recta y un punto

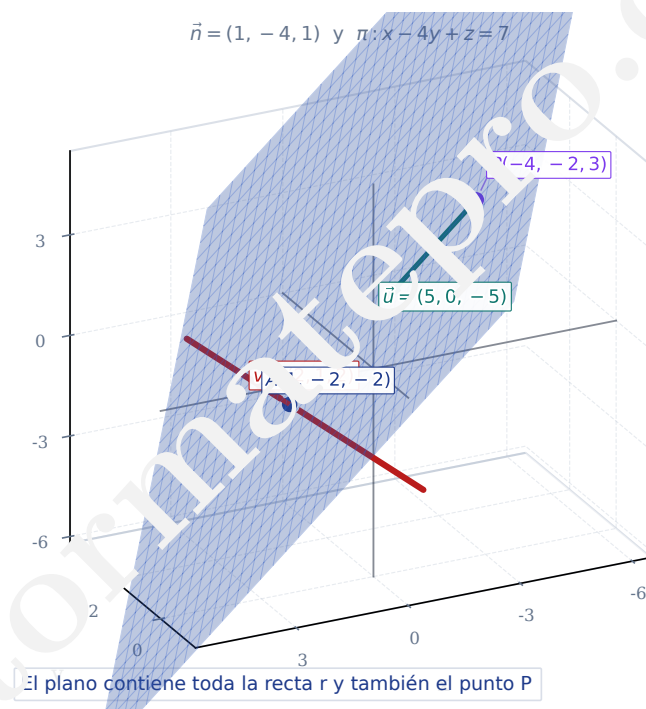


Figura 8: Plano determinado por la recta r y el punto exterior P . El vector normal simplificado es $\vec{n} = (1, -4, 1)$ y la ecuación resultante es $x - 4y + z = 7$.

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 12 Encuentra la ecuación del plano π que contiene a la recta r dada por la intersección de $2x + y - 3z = 3$ y $x - 2y + z = -1$, considerando que el otro vector orientador del plano es la dirección de la recta $s : x = \frac{2y}{-3} = 2z + 2$.

Solución Paso a Paso: 1. **Vector director de la recta de intersección $\vec{u}$:** Se obtiene del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen:

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (2, 1, -3) \times (1, -2, 1) = (-5, -5, -5) \sim (1, 1, 1)$$

2. **Vector director de la recta s :** Describimos s en su forma continua:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-3/2} = \frac{z+1}{1/2} \implies \vec{v}_s = (1, -3/2, 1/2) \sim (2, -3, 1)$$

3. **Punto de apoyo para el plano:** Dado que el plano contiene a la recta r , podemos elegir cualquier punto de esta recta. Tomamos el punto $A(0, 0, -1)$, que satisface las ecuaciones de ambos planos:

$$\blacksquare 2(0) + 0 - 3(-1) = 3$$

$$\blacksquare 0 - 2(0) + (-1) = -1$$

4. **Ecuación del plano:** Usamos el punto $A(0, 0, -1)$ y los vectores directores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y $\vec{v}_s = (2, -3, 1)$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies 4x + y - 5z - 5 = 0$$

La ecuación general del plano es $\boxed{4x + y - 5z = 5}$.

3. Métrica en el Espacio: Distancias y Triángulos

Este tema abarca la ortogonalidad aplicada a figuras cerradas, la optimización de distancias y las propiedades de división de segmentos en coordenadas tridimensionales.

3.1. Comprobación de Ortogonalidad y Teorema de Pitágoras

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 3 Comprobar que el triángulo con vértices $A(1, 2, 0)$, $B(3, 2, 1)$ y $C(1, -4, 0)$ es rectángulo en A .

Solución Paso a Paso: Comprobamos la ortogonalidad mediante dos enfoques:

- **Método A: Producto Escalar:** Los vectores de los catetos que parten del ángulo recto A deben ser perpendiculares ($\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$):

$$\vec{AB} = B - A = (2, 0, 1), \quad \vec{AC} = C - A = (0, -6, 0)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2(0) + 0(-6) + 1(0) = 0 \implies \vec{AB} \perp \vec{AC}$$

Queda demostrado que es rectángulo en A .

- **Método B: Teorema de Pitágoras:** Comprobamos que $\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 = \|\vec{CB}\|^2$:

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5} \implies \|\vec{AB}\|^2 = 5$$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + 0^2} = 6 \implies \|\vec{AC}\|^2 = 36$$

$$\vec{CB} = B - C = (2, 6, 1) \implies \|\vec{CB}\| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 1^2} = \sqrt{41} \implies \|\vec{CB}\|^2 = 41$$

Se verifica: $5 + 36 = 41 \implies 41 = 41$.

Triángulo rectángulo en el espacio

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$, por tanto el ángulo recto está en A

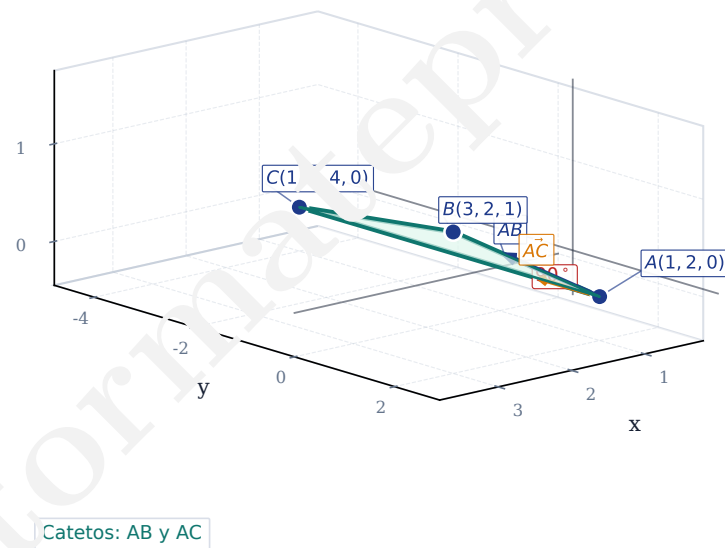


Figura 9: El triángulo rectángulo ABC en el espacio tridimensional. El plano del triángulo y el ángulo recto en A se indican de forma explícita.

3.2. Minimización de la Distancia en función de un Parámetro

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 4 ¿Para qué valor del parámetro t es mínima la distancia entre los puntos $P(2, -1, 3)$ y $Q(t, 1, 2)$? ¿Cuánto vale esa distancia mínima?

Solución Paso a Paso: 1. Planteamos el vector y su norma:

$$\vec{PQ} = Q - P = (t - 2, 2, -1)$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(t - 2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{t^2 - 4t + 9}$$

2. Minimizamos la función cuadrática interior $f(t) = t^2 - 4t + 9$:

$$f'(t) = 2t - 4 = 0 \implies t = 2$$

Como $f''(t) = 2 > 0$, en $t = 2$ se sitúa el mínimo global.

3. Calculamos el valor de la distancia mínima:

$$d_{\min} = \sqrt{2^2 - 4(2) + 9} = \sqrt{5} \approx 2.236 \text{ unidades}$$

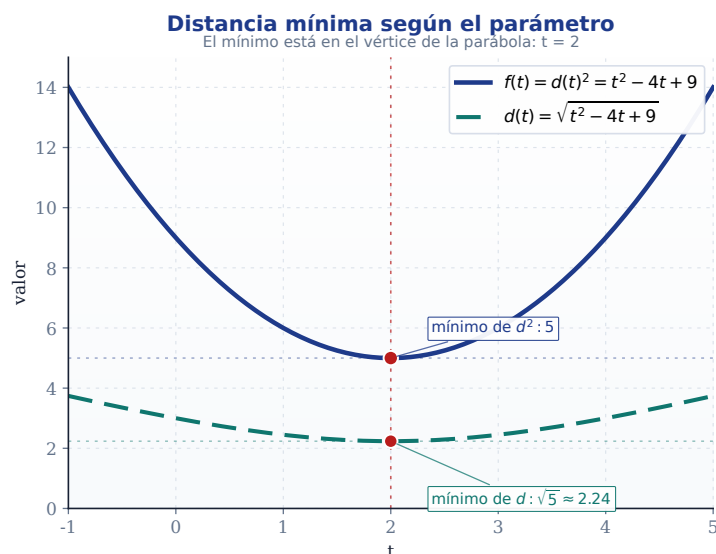


Figura 10: Gráfico de la distancia y distancia al cuadrado en función del parámetro t . El mínimo se encuentra exactamente en el vértice de la parábola, en $t = 2$.

3.3. Propiedades de la Mediana y el Baricentro

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 5 Hallar el baricentro G del triángulo con vértices $A(-1, 2, -4)$, $B(4, 1, 6)$ y $C(0, 3, 4)$. Si M es el punto medio del lado AB , comprobar la propiedad de la mediana: $d(C, G) = 2 \cdot d(G, M)$.

Solución Paso a Paso:

1. Cálculo del baricentro G :

$$G = \frac{A + B + C}{3} = \left(\frac{-1 + 4 + 0}{3}, \frac{2 + 1 + 3}{3}, \frac{-4 + 6 + 4}{3} \right) = \boxed{(1, 2, 2)}$$

2. Cálculo del punto medio M del segmento AB :

$$M = \frac{A + B}{2} = (1.5, 1.5, 1)$$

3. Comprobación de la relación:

- Distancia $d(C, G)$:

$$\begin{aligned}\vec{CG} &= G - C = (1, -1, -2) \\ d(C, G) &= \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}\end{aligned}$$

- Distancia $d(G, M)$:

$$\begin{aligned}\vec{GM} &= M - G = (0.5, -0.5, -1) \\ d(G, M) &= \sqrt{0.5^2 + (-0.5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1.5}\end{aligned}$$

Multiplicamos la distancia menor por 2:

$$2 \cdot d(G, M) = 2\sqrt{1.5} = \sqrt{4 \cdot 1.5} = \sqrt{6} = d(C, G)$$

La relación de la mediana $\boxed{CG = 2GM}$ se cumple rigurosamente.

Baricentro y división de la mediana

El baricentro divide cada mediana en razón 2:1

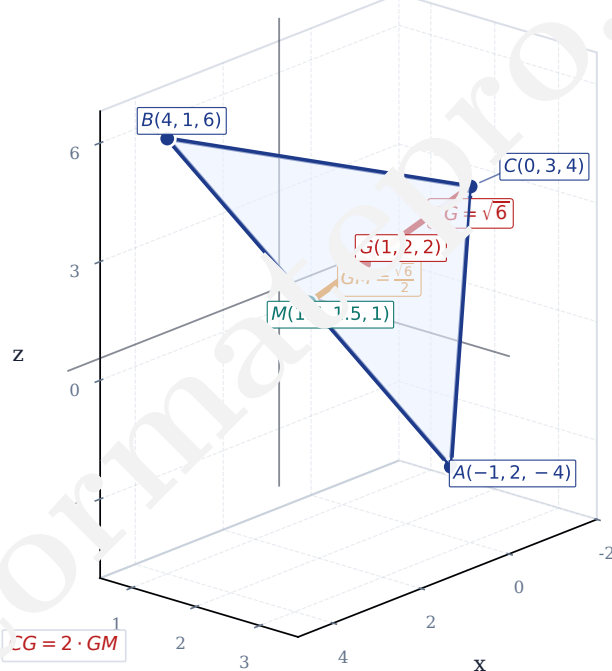


Figura 11: Baricentro $G(1, 2, 2)$ y la mediana que une al vértice C con el punto medio M de AB . Se visualiza la división de la mediana en razón 2 : 1.

3.4. Puntos de División en Razón Dada

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 6 Hallar el punto R alineado con $P(3, -6, 9)$ y $Q(6, 3, -6)$ tal que se cumpla la relación: $\vec{PQ} = 3 \cdot \vec{PR}$.

Solución Paso a Paso: El vector completo es $\vec{PQ} = Q - P = (3, 9, -15)$. Sustituimos en la condición:

$$(3, 9, -15) = 3 \cdot \vec{PR} \Rightarrow \vec{PR} = (1, 3, -5)$$

Como $\vec{PR} = R - P$, despejamos R :

$$R = P + \vec{PR} = (3, -6, 9) + (1, 3, -5) = \boxed{(4, -3, 4)}$$

El punto R divide al segmento de forma que $PR = \frac{1}{3}PQ$, quedando en razón $1 : 2$ con respecto a PQ :

$$\vec{RQ} = Q - R = (2, 6, -10) = 2 \cdot \vec{PR}$$

División interna de un segmento

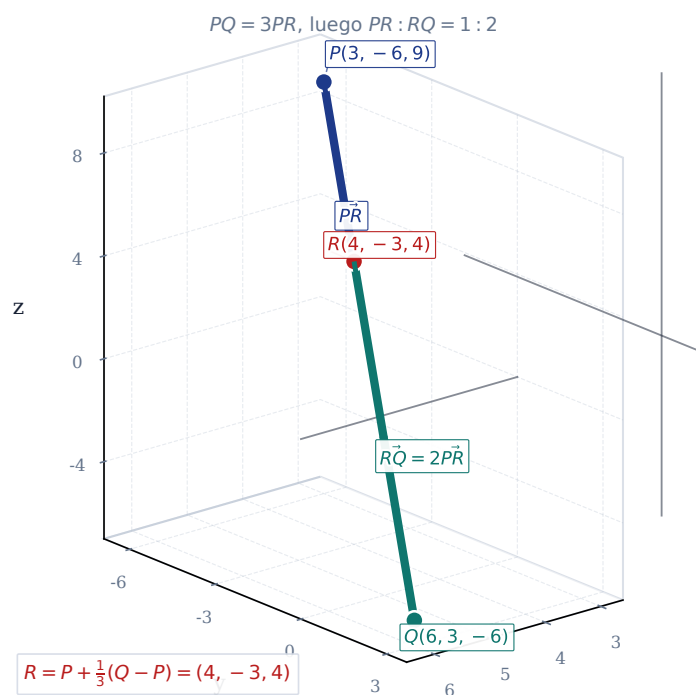


Figura 12: El punto de división $R(4, -3, 4)$ sobre el segmento PQ . Los vectores $\vec{PR}$ y $\vec{RQ}$ ilustran la proporción exacta de división $1 : 2$.

4. Teoría de Probabilidades y Sucesos

Esta sección introduce la base de la teoría de conjuntos para eventos, los axiomas de Kolmogórov y la probabilidad condicional.

4.1. Experimento Aleatorio del Dado y Sucesos Colectivos

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 2 Considerar el experimento aleatorio “lanzar un dado cúbico no sesgado y anotar el resultado”. 1. Escribir el espacio muestral. 2. Estudiar la probabilidad de: suceso A (número impar), suceso B (múltiplo de 3), complemento $\bar{A}$, intersección $A \cap B$ y unión $A \cup B$ utilizando la regla de Laplace y los Axiomas de Kolmogórov.

Solución Paso a Paso: Solución Paso a Paso:

1. Espacio muestral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Los sucesos son equiprobables: $P(\omega_i) = 1/6$.

2. Probabilidades de los sucesos solicitados:

- Suceso A (impar): $A = \{1, 3, 5\} \implies P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \boxed{50\%}$.
- Suceso B (múltiplo de 3): $B = \{3, 6\} \implies P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \boxed{33.3\%}$.
- Suceso Complemento $\bar{A}$: $\bar{A} = \{2, 4, 6\} \implies P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.50 = \boxed{50\%}$.
- Suceso Intersección $A \cap B$: $A \cap B = \{3\} \implies P(A \cap B) = \frac{1}{6} = \boxed{16.7\%}$.
- Suceso Unión $A \cup B$: $A \cup B = \{1, 3, 5, 6\} \implies P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \boxed{66.7\%}$.

Comprobación mediante los Axiomas de Kolmogórov: Para dos sucesos cualesquiera, la probabilidad de la unión se modela como:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \boxed{66.7\%}$$

Se comprueba la consistencia de la medida de probabilidad.

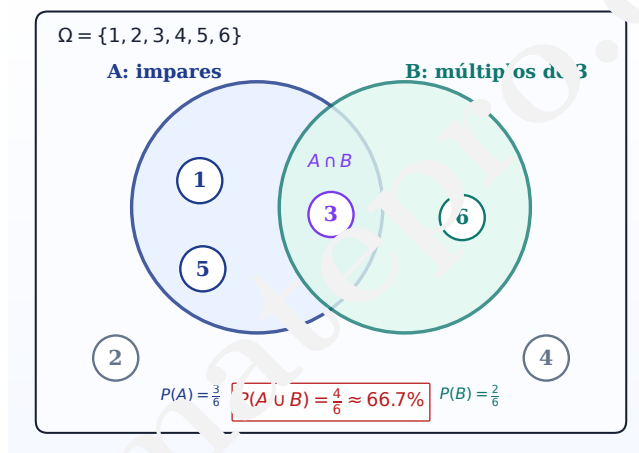
Sucesos en el lanzamiento de un dadoCada resultado pesa $1/6$; la unión no cuenta dos veces el 3

Figura 13: Diagrama de Venn del lanzamiento del dado. Se agrupan los elementos del espacio muestral en los sucesos A y B , identificando la intersección.

4.2. Probabilidad Condicional en una Población

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 3 En una muestra de estudiantes se sabe que el 60 % tiene el pelo castaño (C), el 70 % tiene los ojos castaños (O), y el 80 % tiene al menos uno de los dos atributos (pelo u ojos castaños). Calcula la probabilidad de que un estudiante tenga el pelo castaño sabiendo que tiene los ojos castaños.

Solución Paso a Paso: Identificamos las probabilidades dadas:

$$P(C) = 0.60, \quad P(O) = 0.70, \quad P(C \cup O) = 0.80$$

1. Calculamos la probabilidad de tener ambos atributos ($P(C \cap O)$):
Utilizando la regla de adición de probabilidades:

$$P(C \cup O) = P(C) + P(O) - P(C \cap O) \implies 0.80 = 0.60 + 0.70 - P(C \cap O)$$

$$P(C \cap O) = 1.30 - 0.80 = 0.50 \implies \boxed{50\%}$$

2. Aplicamos la definición de probabilidad condicional: Buscamos $P(C|O)$ (pelo castaño dado ojos castaños):

$$P(C|O) = \frac{P(C \cap O)}{P(O)} = \frac{0.50}{0.70} = \frac{5}{7} \approx \boxed{71.4\%}$$

Probabilidad condicional

Primero se halla la intersección usando $P(C \cup O)$

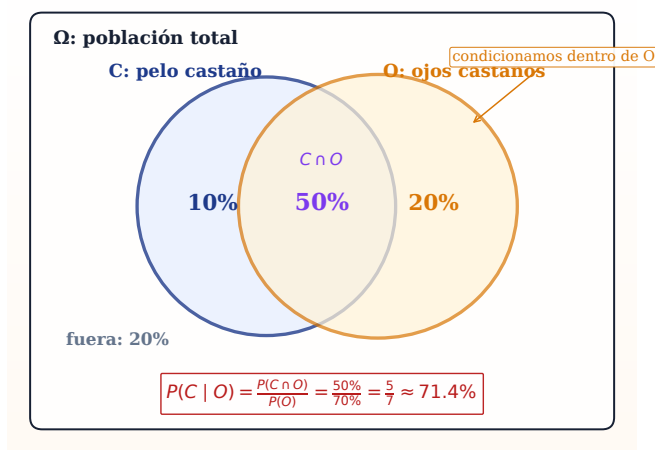


Figura 14: Diagrama de Venn y cálculo de la probabilidad condicional. La región compartida representa el 50 % de la población total y el 71.4 % del conjunto O .

5. Optimización de Volúmenes (Repaso General)

Este bloque final repasa la aplicación de la derivada para la resolución de problemas geométricos de optimización.

5.1. Maximización del Volumen de un Depósito Cilíndrico

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 1 Se quiere fabricar un depósito cilíndrico cerrado (con tapas circulares) utilizando una lámina metálica de área total fija $A = 150\pi \text{ dm}^2$. Hallar el radio r y la altura h del cilindro que maximiza su volumen, y calcular dicho volumen máximo.

Solución Paso a Paso: 1. **Planteamiento geométrico:** El área superficial total del cilindro es:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Como el área disponible es 150π , planteamos la relación:

$$2\pi r^2 + 2\pi rh = 150\pi \Rightarrow 2\pi r(r + h) = 150\pi \Rightarrow r(r + h) = 75$$

Despejamos la altura h como función de la variable r :

$$h(r) = \frac{75 - r^2}{r} = \frac{75}{r} - r$$

Como el radio y la altura deben ser positivos ($r > 0, h > 0$), el dominio físico es:

$$\frac{75}{r} - r > 0 \Rightarrow 75 > r^2 \Rightarrow 0 < r < \sqrt{75} \approx 8.66 \text{ dm}$$

2. **Definimos la función Volumen:**

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(\frac{75}{r} - r \right) = 75\pi r - \pi r^3$$

3. **Optimizamos el volumen derivando:**

$$V'(r) = 75\pi - 3\pi r^2 = 0 \Rightarrow 3\pi r^2 = 75\pi \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5 \text{ dm}$$

Realizamos el análisis de signos de la primera derivada en el dominio $(0, 8.66)$ para comprobar si es máximo:

- Para $r = 1 \in (0, 5) \Rightarrow V'(1) = 72\pi > 0$ (función creciente).
- Para $r = 6 \in (5, 8.66) \Rightarrow V'(6) = -33\pi < 0$ (función decreciente).

Por tanto, $r = 5 \text{ dm}$ es un máximo local y global.

4. **Valores óptimos:**

- Altura óptima: $h(5) = \frac{75}{5} - 5 = 15 - 5 = \boxed{10 \text{ dm}}$.
- Volumen máximo: $V(5) = \pi(5)^2(10) = \boxed{250\pi \approx 785.4 \text{ dm}^3}$.

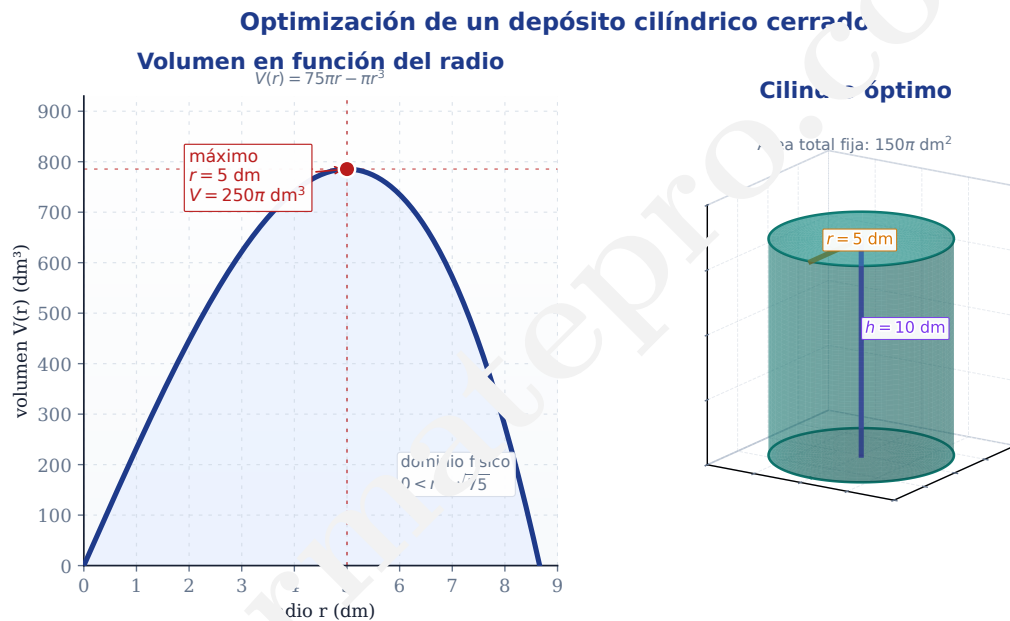


Figura 15: Optimización del depósito cilíndrico. A la izquierda se muestra la gráfica de volumen $V(r)$ con su máximo en $r = 5$. A la derecha se representa el cilindro óptimo en 3D.

6. Matrices y Álgebra Lineal: Repaso de Selectividad

Esta sección final recopila el estudio algebraico de las transformaciones matriciales, el cálculo de potencias de matrices y la deducción de inversas mediante identidades polinómicas, un enfoque clásico de las pruebas de selectividad.

6.1. Cálculo de Inversas mediante Identidades Matriciales

Ejemplo Práctico / Resolución de Ejercicio

Ejercicio 1 Sean las matrices de orden 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

y la matriz identidad de orden 2, I .

1. Comprobar que $(A - 2I)^2 = 3I$.
2. Utilizando la igualdad del apartado anterior, encontrar la matriz inversa de A en función de las matrices A e I , y comprobar que coincide con la matriz B .

Solución Paso a Paso:

Apartado 1: Comprobación de la identidad $(A - 2I)^2 = 3I$

Calculamos en primer lugar la matriz $A - 2I$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Elevamos esta matriz resultante al cuadrado:

$$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0(0) + 1(3) & 0(1) + 1(0) \\ 3(0) + 0(3) & 3(1) + 0(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$$

Queda demostrada la identidad.

Apartado 2: Deducción analítica de la matriz inversa A^{-1}

Utilizamos la propiedad distributiva del producto de matrices respecto a la suma y el hecho de que la matriz identidad conmuta con cualquier matriz ($AI = IA = A$):

$$(A - 2I)^2 = (A - 2I)(A - 2I) = A^2 - 2AI - 2IA + 4I^2 = A^2 - 4A + 4I$$

Igualamos este desarrollo a la identidad demostrada:

$$A^2 - 4A + 4I = 3I \implies A^2 - 4A + I = 0$$

Despejamos la matriz identidad I en un miembro para forzar la estructura de la matriz inversa ($A \cdot A^{-1} = I$):

$$I = 4A - A^2 \implies I = A(4I - A)$$

Por la definición de matriz inversa, si $A \cdot C = I$, entonces $C = A^{-1}$. Por lo tanto:

$$A^{-1} = 4I - A$$

Evaluamos numéricamente esta expresión en función de las matrices conocidas para comprobar si coincide con B :

$$A^{-1} = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = B$$

Se comprueba de manera exacta que $A^{-1} = B$.

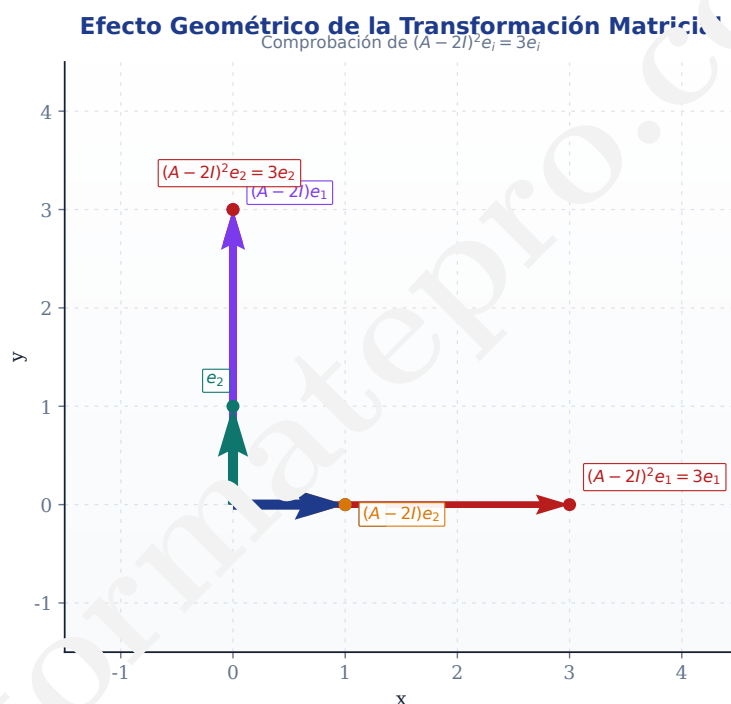


Figura 16. Representación del efecto geométrico de la transformación lineal. Al aplicar la matriz de desviación $T = A - 2I$ sobre la base canónica se obtiene una rotación y escalado cruzado, pero al aplicar la vez doble ($T^2 = 3I$), los vectores resultantes quedan perfectamente alineados con los originales y multiplicados por un factor de 3.